



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

ТАГАНРОГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Шеболков В.В.

ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СИСТЕМ ЧАСТЬ 1

Учебное пособие

Для студентов специальностей
210800, 210304, 210402

Кафедра РТС

РТФ

Таганрог 2005

1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Теоретические сведения

Событие – всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

События подразделяются на достоверные, невозможные и случайные, причем достоверные события обозначаются буквой U , невозможные – V , а случайные – буквами A, B, C, \dots . Вероятность достоверного события принимается за единицу, а вероятность не-возможного – за нуль:

$$P(U) = 1, P(V) = 0.$$

Вероятность любого события A заключена в пределах от 0 до 1:

$$0 < P(A) < 1. \quad (1.1)$$

Если всякий раз, когда происходит событие A , происходит так-же событие B , то говорят, что событие A влечет за собой событие B , и обозначают $A \subset B$. Если $A \subset B$ и в то же время $B \subset A$, то говорят, что события A и B равносильны, и обозначают $A = B$. В этом случае $P(A) = P(B)$.

Суммой (объединением) множества событий A, B, C, \dots называется такое событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит по крайней мере одно («хотя бы одно») из этих событий. Сумма событий A, B, C, \dots обозначается знаком $A + B + C + \dots$. Если события

обозначены буквой A с различными индексами k , то сумма этих событий обозначается $\sum_{k=1} A_k$

Из определения суммы событий непосредственно вытекают следующие соотношения:

$$A + A = A; A + U = U; A + V = A; A + B = B + A; (A + B) + C = A + (B + C). \quad (1.2)$$

Произведением (или совмещением, или пересечением) событий A, B, C, \dots называется событие, происходящее тогда и только тогда, когда происходят все события вместе («одновременно»). Для обозначения произведения событий применяются следующие записи:

$$ABC \dots, \prod_k A_k$$

- если события обозначены одной буквой A с различными индексами.

Для произведения событий справедливы соотношения:

$$AA = A; AV = V; AU = A; AB = BA; (AB)C = A(BC). \quad (1.3)$$

Для операций умножения и сложения событий, применяемых совместно, справедлив обычный распределительный (дистрибутивный) закон

$$(A + B)C = AC + BC \quad (1.4)$$

и, кроме того, так называемый «второй распределительный закон» [1]

$$AB + C = (A + C)(B + C). \quad (1.5)$$

События A, B, C, \dots образуют полную группу событий, если в результате опыта непременно должно появиться хотя бы одно из них. Другими словами, сумма событий, образующих полную группу, является достоверным событием, т. е.

$$A + B + C + \dots = U.$$

События A и B называются несовместными (или несовместимыми), если их совместное появление невозможно, т. е. если

$$AB = V.$$

Два несовместных события, образующих полную группу, называются противоположными (или дополнительными) событиями. Событие, противоположное событию A , обозначается \bar{A} .

Для противоположных событий справедливы формулы:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\bar{A}} &= A; \bar{U} = V; \bar{V} = U; A + \bar{A} = U; A\bar{A} = V; \\ \bar{A + B} &= \bar{A}\bar{B}; \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}; A + B = A + \bar{A}\bar{B}; \\ A + B &= \overline{AB}; AB = \overline{\bar{A} + \bar{B}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Когда рассматриваемый опыт имеет N равновероятных исходов, которые несовместны и составляют полную группу (схема случаев), вероятность $P(A)$ события A равна

$$P(A) = \frac{n}{N} \quad (1.7)$$

где n – число исходов, которые приводят к наступлению события A (благоприятствуют событию A).

При решении задач на непосредственный подсчет вероятностей с использованием формулы (1.7) общих способов для нахождения чисел N и n нет. Во многих случаях целесообразно использовать «комбинаторные» способы, т. е. теорию соединений (размещений, перестановок, сочетаний). При этом часто приходится вычислять число сочетаний

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.8)$$

Если значения n и k велики, то используют приближенную формулу Стирлинга

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}. \quad (1.9)$$

Эта формула дает хорошую точность приближения и при сравнительно небольших значениях n . Так, например, относительная погрешность ее не превосходит 0,1 при $n > 1$, не превосходит 0,01 при $n > 10$ и 0,001 при $n > 100$.

В некоторых задачах понятие равновероятности событий применяется к опытам с бесконечным числом исходов, когда числа N и n определить невозможно. Иногда же проще вычислить саму вероятность события (отношение n/N), а не порознь числа исходов n и N .

В таких случаях пользуются геометрическими вероятностями, которые определяются формулой

$$P(A) = (\text{мера } g) / (\text{мера } G) \quad (1.10)$$

где G – геометрическая мера (длина, площадь, объем и т. д.) всей области; g – геометрическая мера части области G , попадание в которую благоприятствует событию A .

Определение вероятности сложного события A через вероятности более простых событий A_1, A_2, \dots, A_n базируется на использовании основных теорем теории вероятностей (теоремы сложения и умножения вероятностей и их следствий).

Согласно теореме сложения вероятностей вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (1.11)$$

Если события A и B несовместны, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \quad (1.12)$$

Формулы (1.11) и (1.12) обобщаются на сумму любого числа n событий

$$P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n P(A_k A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{k=1}^n A_k\right), \quad (1.11a)$$

$$P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k). \quad (1.12a)$$

Сумма вероятностей несовместных событий, составляющих полную группу, равна единице, т. е.

$$\sum_{k=1}^n P(A_k) = 1. \quad (1.13)$$

Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (1.14)$$

По теореме умножения вероятностей для двух событий вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что произошло первое:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B), \quad (1.15)$$

где $P(A|B)$ – условная вероятность события A , т. е. вероятность события A , вычисленная в предположении, что имело место событие B .

Если событие A статистически не зависит от события B , то $P(A|B) = P(A)$, причем события A и B называются независимыми. При независимых событиях A и B выражение (1.15) принимает вид

$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (1.16)$$

Формулы (1.15) и (1.16) обобщаются на n событий A_1, A_2, \dots, A_n :

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}) \quad (1.15a)$$

$$P\left(\prod_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k). \quad (1.16a)$$

Решение многих практических задач требует совместного использования теорем сложения и умножения вероятностей. В частности, с помощью этих теорем производится расчет надежности, например, радиотехнических систем.

Надежностью некоторой системы (или ее элемента) называют вероятность того, что система (элемент) в течение установленного времени будет работать без отказов.

При объединении нескольких элементов в систему различают их параллельное (резервирование) и последовательное соединение. При параллельном соединении (рис. 1.1) отказ системы возможен только при отказе всех элементов, а при последовательном (рис. 1.2) отказ системы происходит при отказе любого элемента [2].

Надежность P параллельного соединения k элементов равна

$$P = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - p_i) \quad (1.17)$$

где p_i – вероятность безотказной работы (надежность) i -го элемента. С увеличением числа параллельно включенных элементов надежность системы возрастает.

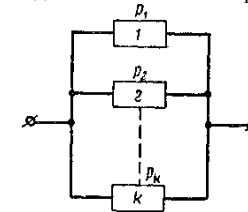


Рис. 1.1. Параллельное соединение элементов.

Надежность P последовательного соединения k элементов вычисляется по формуле

$$P = \prod_{i=1}^k p_i. \quad (1.18)$$

С увеличением числа последовательно включенных элементов надежность системы убывает.

Во многих реальных ситуациях то или иное событие A может появиться лишь как случайное следствие одного из несовместных событий H_i , $i = 1, 2, \dots, n$, которые входят в некоторую полную группу событий и называются гипотезами. В таких случаях безусловная вероятность $P(A)$ события A при известных вероятностях гипотез $P(H_i)$ и условных вероятностях $P(A|H_i)$ определяется по формуле полной (или средней) вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i). \quad (1.19)$$

При этих же данных, т. е. известных вероятностях $P(H_i)$ и $P(A|H_i)$, можно найти изменение вероятностей гипотез H_i , если предположить, что событие A уже произошло. Задачи подобного типа решаются с помощью теоремы гипотез (или формулы Байеса)

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{k=n} P(H_k)P(A|H_k)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}. \quad (1.20)$$

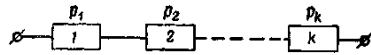


Рис. 1.2. Последовательное соединение элементов.

Вероятность $P(H_i)$ называется априорной (или доопытной), а $P(H_i|A)$ – апостериорной (послеопытной) или обратной вероятностью.

В теории передачи сообщений, теории стрельбы, контроле качества продукции и т. д. часто возникают задачи по определению вероятности появления какого-то события A в результате серии опытов, в каждом из которых это событие может произойти или не произойти. Проще всего они решаются тогда, когда опыты являются независимыми, т. е. вероятность того или иного исхода опыта не зависит от того, какие исходы имели другие опыты. Способ решения подобных задач дает теорема о повторении опытов (формула Я. Бернулли).

Вероятность $P_n(k)$ того, что при n независимых опытах (испытаниях) событие A появится ровно k раз, если при каждом опыте вероятность события A одинакова и равна p , определяется формулой

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (1.21)$$

где $q = 1 - p$.

Формулой (1.21) неудобно пользоваться при больших n . В этом случае для подсчета вероятности $P_n(k)$ применяют приближенные формулы.

Если n велико, p мало, а $np = \lambda$ имеет конечное значение, то пользуются приближенной формулой Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (1.22)$$

Приближенное значение относительной погрешности при применении формулы (1.22) вместо (1.21) составляет величину

$$r_n(k) = \frac{k - (k - np)^2}{2n} + \frac{1}{2} kp^2. \quad (1.23)$$

Когда npq не слишком мало, то применяется локальная формула Муавра – Лапласа

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} w(x), \quad (1.24)$$

где

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Приближенное значение относительной погрешности при вычислении вероятности $P_n(k)$ по формуле (1.24) составляет величину

$$r_n(k) = \frac{p - q}{2\sqrt{npq}} x \left(1 - \frac{x^2}{3} \right). \quad (1.25)$$

С помощью формулы (1.21) можно вычислить вероятность $P_n(m \geq k)$ того, что при n независимых опытах событие A , имеющее вероятность p , появится не менее k раз:

$$P_n(m \geq k) = \sum_{m=k}^n C_n^m p^m q^{n-m} = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} C_n^m p^m q^{n-m}. \quad (1.26)$$

Вероятность $P_n(m \geq 1)$ появления события хотя бы один раз при n опытах равна

$$P_n(m \geq 1) = (1 - q^n) \quad (1.27)$$

Вероятность $P_n(m \leq k)$ того, что при n независимых опытах событие A , имеющее вероятность p , появится не более k раз, определяется выражением

$$P_n(m \leq k) = \sum_{m=0}^k C_n^m p^m q^{n-m}. \quad (1.28)$$

Если вероятность появления события в каждом опыте равна p , то вероятность того, что в серии из n независимых опытов событие появится от μ , до ν раз включительно, равна

$$P_n(\mu \leq k \leq \nu) = \sum_{m=\mu}^{\nu} C_n^m p^m q^{n-m}. \quad (1.29)$$

При больших n , μ и ν этой формулой пользоваться затруднительно. В этом случае используют приближенную интегральную формулу Муавра – Лапласа

$$P_n(\mu \leq k \leq \nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(b) - \Phi(a), \quad (1.30)$$

где

$$a = \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}}; \quad b = \frac{\nu - np}{\sqrt{npq}}; \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Количество n опытов, которые нужно произвести для того, чтобы с вероятностью не меньше P_n можно было утверждать, что данное событие произойдет по крайней мере один раз, находится по формуле

$$n \geq \frac{\log(1 - P_n)}{\log(1 - p)}. \quad (1.31)$$

Наивероятнейшим числом k_0 появлений события A в n независимых опытах называется такое значение $k = k_0$, при котором вероятность $P_n(k)$ наибольшая. Для его определения служит формула

$$np - q \leq k_0 \leq np + p. \quad (1.32)$$

Если же число $np = q$ целое, то неравенство (1.32) определяет два значения наивероятнейшего числа.

Формула (1.21) составляет содержание так называемой частной теоремы о повторении опытов. Известно несколько обобщений ее. Одно из них относится к случаю, когда из-за изменяющихся условий при проведении n независимых опытов вероятность p меняется от опыта к опыту (общая теорема о повторении опытов). В этом случае вероятность $P_n(k)$ появления события A ровно k раз определяется по производящей функции [3]

$$\Phi_n(z) = \prod_{i=1}^n (q_i + p_i z) = \sum_{k=0}^n P_n(k) z^k, \quad (1.33)$$

где p_i – вероятность появления события в i -м опыте; $q_i = 1 - p_i$. Искомая вероятность $P_n(k)$ равна коэффициенту при z^k в разложении производящей функции и может быть определена дифференцированием функции $\Phi_n(z)$:

$$P_n(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k \Phi_n(z)}{dz^k} \right]_{z=0}. \quad (1.34)$$

Второе обобщение формулы (1.21) имеет в виду, что каждый опыт может иметь не два, а большее число исходов. Если, например, при каждом повторении опыта может произойти только одно из событий A_1, A_2, \dots, A_m соответственно с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_m ($\sum_{i=1}^m p_i = 1$),

то вероятность $P_n(k_1, k_2, \dots, k_m)$ того, что при n независимых опытах событие A_1 появится k_1 раз, событие A_2 появится k_2 раз, ..., событие A_m появится k_m раз ($\sum_{i=1}^m k_i = n$), определяется

формулой полиномиального распределения

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}. \quad (1.35)$$

Вероятность $P_n(k_1, k_2, \dots, k_m)$ является коэффициентом при $z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_m^{k_m}$ в разложении по степеням аргументов z_k полинома

$$\Phi_n(z_1, z_2, \dots, z_m) = (p_1 z_1 + p_2 z_2 + \dots + p_m z_m)^n, \quad (1.36)$$

представляющего собой производящую функцию для совокупности чисел $P_n(k_1, k_2, \dots, k_m)$.

§ 2. Примеры

Пример 1.1. Доказать справедливость следующего соотношения между событиями: $(A+B)C = AC + BC$.

Решение. Заданный распределительный закон можно доказать путем непосредственного рассмотрения смысла утверждений, выражаемых каждой частью равенства. Левая часть данного равенства означает событие, состоящее в том, что произошли совместно события A или B и событие C . Правая часть означает, что происходят события A вместе с C или B вместе с C (или и то, и другое). Эти два утверждения равносильны.

Пример 1.2. Показать, что $A + AB + BC + \bar{A}C = A + C$.

Решение. Доказательство справедливости заданного равенства' проведем алгебраическим путем. Используя формулы (1.2) – (1.6), имеем

$$\begin{aligned} A + AB + BC + \bar{A}C &= (AU + AB) + BC + \bar{A}C = A(U + B) + \bar{A}C + \\ &+ BC = AU + \bar{A}C + BC = A + \bar{A}C + BC = A + AC + \bar{A}C + BC = \\ &= A + C(A + \bar{A}) + BC = A + C + BC = A + C. \end{aligned}$$

Пример 1.3. Две игральные кости бросаются один раз. Найти вероятность $P(A)$ того, что сумма выпавших очков есть простое число.

Решение. Число всех возможных случаев N , т. е. число пар чисел (i, j) , равно $N = 6^2$. Число благоприятствующих случаев n подсчитаем следующим образом. Расположим все возможные исходы, т. е. пары (i, j) и суммы $i+j$, в виде таблицы.

j \ i	i					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Из таблицы видно, что простое число 2 получается один раз, простое число 3 – два раза, простое число 5 – четыре раза, простое число 7 – шесть раз, простое число 11 – два раза. Таким образом, число благоприятствующих случаев n равно

$$n = 1 + 2 + 4 + 6 + 2 = 15. \text{ Следовательно,}$$

$$P(A) = n/N = 15/36 \approx 0,417.$$

Пример 1.4. По линии связи в случайном порядке передаются все 30 знаков алфавита.

Определить вероятность $P(A)$ того, что на ленте появится последовательность букв, образующих слово «радио».

Решение. Число всех равновозможных случаев N (число выборов из 30 букв алфавита по 5) равно числу размещений из 30 по 5 букв, т. е.

$$N = A_{30}^5 = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26.$$

Из этих случаев благоприятствующим событию A является только один (комбинация, образующая слово «радио»), т. е. $n = 1$. Следовательно,

$$P(A) = n/N = 1/A_{30}^5 = 1/30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26.$$

Пример 1.5. Принимаются кодовые комбинации, содержащие пять цифр от 1 до 5.

Какова вероятность $P(A)$ того, что в принятой комбинации цифры образуют последовательность 12345?

Решение. Число всех равновозможных случаев N равно числу перестановок из пяти элементов, т. е. $N = P_5 = 5! = 120$. Из этих случаев благоприятствующим событию A является только один, т. е. $n = 1$. Следовательно,

$$P(A) = n/N = 1/5! = 1/120$$

Пример 1.6. В партии из N микросхем содержится M нестандартных. Для проверки наудачу выбираются k микросхем из этой партии ($k < N$).

Определить вероятность $P(A)$ того, что среди них окажутся ровно m нестандартных ($m < M$).

Решение. Общее число возможных выборов из N микросхем по k равно числу сочетаний из N элементов по k , т. е. C_N^k . Благоприятствующими поставленному условию являются случаи, когда из общего числа M нестандартных микросхем взято ровно m штук, что можно осуществить C_M^m способами. Но каждый из этих случаев в контрольной партии может быть в различной комбинации с остальными $k-m$ стандартными микросхемами. Число таких комбинаций равно C_{N-M}^{k-m} . Следовательно, общее число благоприятствующих случаев будет равно произведению $C_M^m \cdot C_{N-M}^{k-m}$. В соответствии с определением вероятности получим

$$P(A) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{k-m}}{C_N^k}$$

Пример 1.7. В любые моменты времени промежутка T равновозможны поступления в приемник двух независимых сигналов. Приемник будет перегружен, если разность между моментами поступления сигналов будет меньше τ .

Определить вероятность $P(A)$ того, что приемник будет перегружен.

Решение. Изобразим случайные моменты поступления сигналов в радиоприемник τ_1 и τ_2 как декартовы координаты на плоскости. Областью возможных значений τ_1 и τ_2 является квадрат площадью $S = T^2$ (рис. 1.3).

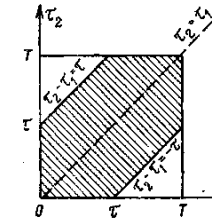


Рис. 1.3. К вычислению вероятности $P(A)$.

Приемник будет перегружен, если $|\tau_2 - \tau_1| < \tau$. Данная область лежит между прямыми $\tau_2 - \tau_1 = \tau$ и $\tau_2 - \tau_1 = -\tau$. Площадь этой области s равна

$$S = T^2 - (T - \tau)^2.$$

Следовательно,

$$P(A) = (s / T^2) = 1 - (T - \tau)^2 / T^2$$

Пример 1.8. По статистическим данным сервисного центра в среднем на 100 отказов телевизора приходится: 50% по причине выхода из строя микросхем, 15% – конденсаторов, 12% – резисторов, 5% – кинескопов, а остальные по другим причинам.

Найти вероятность $P(A)$ отказа телевизора по другим причинам.

Решение. По условию примера вероятности выхода из строя телевизора из-за отказа различных элементов равны:

$$P(A_1) = 0,5; P(A_2) = 0,15; P(A_3) = 0,12; P(A_4) = 0,05,$$

где A_1 – отказ телевизора по причине выхода из строя микросхем;

A_2 – отказ телевизора из-за конденсаторов; A_3 – отказ телевизора из-за резисторов; A_4 – отказ телевизора из-за кинескопов.

События A, A_1, A_2, A_3, A_4 составляют полную группу. Следовательно,

$$P(A) = 1 - \sum_{i=1}^4 P(A_i) = 1 - (0,5 + 0,15 + 0,12 + 0,05) = 0,18$$

Пример 1.9. В партии из N полупроводниковых приборов имеется M бракованных. Из партии для контроля наугад берется n приборов. Какова вероятность $P(A)$ того, что среди них будет не более m бракованных?

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что среди n взятых для контроля приборов будет не более m бракованных. Событие A произойдет тогда, когда среди n взятых на проверку приборов или не будет ни одного бракованного (событие A_0), или один бракованный (событие A_1), или два бракованных (событие A_2), или..., или m бракованных приборов (событие A_m), т. е.

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_k + \dots + A_m = \sum_{k=0}^m A_k.$$

Вероятность $P(A_k)$ события A_k равна

$$P(A_k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Следовательно, по теореме сложения вероятностей событий имеем

$$P(A) = \sum_{k=0}^m P(A_k) = \frac{\sum_{k=0}^m C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Пример 1.10. Обнаружение воздушной цели производится независимо двумя радиолокационными станциями. Вероятность $P(A)$ обнаружения цели первой станцией равна 0,7. Вероятность $P(B)$ обнаружения цели второй станцией равна 0,8.

Определить вероятность $P(C)$ того, что цель будет обнаружена хотя бы одной станцией.

Пример 1.11. Каждая буква слова «математика» написана на отдельной карточке, которые тщательно перемешаны. Последовательно извлекаются четыре карточки.

Какова вероятность $P(A)$ получить слово «тема»?

Пример 1.12 Два стрелка, чередуясь, стреляют по мишени до первого попадания. Каждый из них имеет право сделать не более двух выстрелов. Зная, что при одном выстреле первый стрелок попадает в мишень с вероятностью p_1 а второй – с вероятностью p_2 , найти вероятности того, что: а) первый стрелок попадет в мишень; б) второй стрелок попадет в мишень.

Пример 1.13» Система управления состоит из четырех узлов A_1, A_2, A_3 и A_4 (рис. 1.5). Вероятности p_i безотказной работы узлов соответственно равны p_1, p_2, p_3, p_4 .

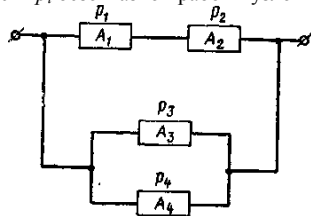


Рис. 1.5. Блок-схема системы управления.

Вычислить надежность P всей системы управления.

Пример 1.14. В двух партиях однотипных изделий содержится соответственно a и b изделий, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Наудачу взятое изделие из первой партии переложено во вторую, после чего из второй партии наугад выбирается одно изделие.

Какова вероятность $P(A)$ того, что это изделие окажется бракованным?

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что извлеченное из второй партии изделие бракованное. Из первой партии во вторую может быть переложено бракованное изделие (гипотеза H_1), либо небракованное (гипотеза H_2) причем вероятности этих событий равны

$$P(H_1) = \frac{1}{a}, \quad P(H_2) = \frac{a-1}{a}.$$

Условная вероятность $P(A|H_1)$ того, что при гипотезе H_1 из второй партии выбрано бракованное изделие равна $P(A|H_1) = 2/(b+1)$, а условная вероятность выбора из второй партии бракованного изделия при гипотезе H_2 равна $P(A|H_2) = 1/(b+1)$. Тогда согласно формуле полной вероятности (1.19) получим

$$P(A) = \sum_{i=1}^2 P(H_i) P(A|H_i) = \frac{1}{a} \cdot \frac{2}{b+1} + \frac{a-1}{a} \cdot \frac{1}{b+1} = \frac{a+1}{a(b+1)}.$$

Пример 1.15. Вероятности того, что параметры одного из трех блоков радиостанции (антенно-фидерного устройства, приемника или передатчика) выйдут за время полета из допусков равны соответственно 0,1; 0,2; 0,3. В случае, если из поля допусков вышли параметры одного блока, связь не будет установлена с вероятностью 0,25, двух блоков – 0,4, трех – 0,5.

Найти вероятность $P(A)$ того, что связь не будет установлена.

Решение. К интересующему нас событию A ведут три гипотезы:

H_1 – за поле допусков вышли параметры одного блока;

H_2 – за поле допусков вышли параметры двух блоков;

H_3 – за поле допусков вышли параметры трех блоков.

Согласно теореме сложения и умножения вероятностей имеем:

$$P(H_1) = 0,1(1-0,2)(1-0,3) + 0,2(1-0,1)(1-0,3) + 0,3(1-0,1)(1-0,2) = 0,398;$$

$$P(H_2) = 0,1 \cdot 0,2(1-0,3) + 0,1 \cdot 0,3(1-0,2) + 0,2 \cdot 0,3(1-0,1) = 0,092;$$

$$P(H_3) = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,006.$$

По условию $P(A|H_1)=0,25$; $P(A|H_2)=0,4$; $P(A|H_3)=0,5$. Следовательно, по формуле полной вероятности (1.19) получим

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) P(A|H_i) = 0,398 \cdot 0,25 + 0,092 \cdot 0,4 + 0,006 \cdot 0,5 \approx 0,139.$$

Пример 1.16. По каналу связи, подверженному воздействию помех, передается одна из двух команд управления в виде кодовых комбинаций 11111 или 00000, причем априорные вероятности передачи этих команд соответственно равны 0,7 и 0,3. Из-за наличия помех вероятность правильного приема каждого из символов (1 и 0) уменьшается до 0,6. Предполагается, что символы кодовых комбинаций искажаются независимо друг от друга. На выходе приемного устройства зарегистрирована комбинация 10110. Спрашивается, какая команда была передана?

Решение. Пусть L – событие, состоящее в приеме комбинации 10110. К этому событию ведут две гипотезы: H_1 – была передана комбинация 11111; H_2 – была передана комбинация 00000.

По условию $P(H_1) = 0,7$; $P(H_2) = 0,3$. Условная вероятность приема кодовой комбинации 10110 вместо 11111 равна

$P(A|H_1) = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \approx 0,035$. Аналогично $P(A|H_2) = 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \approx 0,023$. По формуле гипотез (1.20) находим

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) P(A|H_1)}{\sum_{k=1}^2 P(H_k) P(A|H_k)} = \frac{0,7 \cdot 0,035}{0,7 \cdot 0,035 + 0,3 \cdot 0,023} \approx 0,78$$

$$P(H_2|A) = \frac{0,3 \cdot 0,023}{0,0314} = 0,22.$$

На основании сравнения найденных условных вероятностей заключаем, что при появлении на выходе комбинации 10110 с вероятностью 0,78 была передана команда 11111.

Пример 1.17. Имеются две одинаковые на вид урны: в первой – два белых шара и три черных, во второй – три белых и один черный. Из первой урны наудачу перекладывают во вторую два шара, а затем из второй урны наугад вынимают один шар. Этот шар оказался белым. Какой состав переложенных шаров является наиболее вероятным?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что вынутый из второй урны шар белый. К этому событию ведут три гипотезы (предположения):

H_1 – из первой урны во вторую переложены два белых шара;

H_2 – из первой урны во вторую переложены два черных шара;

H_3 – из первой урны во вторую переложены один белый и один черный шары.

По условию вероятности гипотез $P(H_i)$ и условные вероятности $P(A|H_i)$ имеют следующие значения:

$$P(H_1) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}; \quad P(H_2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10};$$

$$P(H_3) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10};$$

$$P(A|H_1) = \frac{3+2}{4+2} = \frac{5}{6}; \quad P(A|H_2) = \frac{3}{6};$$

$$P(A|H_3) = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6}.$$

Согласно формуле гипотез (1.20) апостериорные вероятности гипотез $P(H_i|A)$ будут равны

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) P(A|H_1)}{\sum_{k=1}^3 P(H_k) P(A|H_k)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6}}{\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{6} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{6}} = \frac{5}{38};$$

$$P(H_2|A) = \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{6}}{\frac{38}{60}} = \frac{9}{38}; \quad P(H_3|A) = \frac{\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{38}{60}} = \frac{12}{19}.$$

Сравнивая значения апостериорных вероятностей, видим, что, наиболее вероятно из первой урны во вторую переложили один черный шар и один белый шар.

Пример 1.19. По цели делается 6 независимых выстрелов. Вероятность p попадания при каждом выстреле равна 0,75.

Вычислить: а) вероятность ровно пяти попаданий; б) вероятность не менее пяти попаданий; в) вероятность более трех промахов.

Решение.

а) По условию вероятность попадания при каждом выстреле $p = 0,75$. Следовательно, вероятность промаха $q = 1 - p = 0,25$. Вероятность $P_6(5)$ ровно пяти попаданий по формуле (1.21) равна

$$P_6(5) = C_6^5 p^5 q^1 = 6 (0,75)^5 \cdot 0,25 \approx 0,356.$$

б) Требование, чтобы при 6 выстрелах было не менее пяти попаданий, будет удовлетворено, если осуществится или 5 попаданий, или 6. Эти события несовместны. Поэтому по формуле (1.26) имеем

$$P_6(m \geq 5) = \sum_{m=5}^6 C_6^m p^m q^{6-m} = C_6^5 p^5 q^1 + C_6^6 p^6 q^0 = \\ = 6 \cdot (0,75)^5 \cdot 0,25 + 1 \cdot (0,75)^6 \cdot 1 \approx 0,534.$$

в) Вероятность того, что при 6 выстрелах будет более трех промахов, равна вероятности того, что при этих 6 выстрелах будет меньше трех попаданий (или ни одного попадания, или одно, или два попадания). Используя формулу (1.28), получим

$$P_6(m \leq 2) = \sum_{m=0}^2 C_6^m p^m q^{6-m} = C_6^0 p^0 q^6 + C_6^1 p^1 q^5 + C_6^2 p^2 q^4 = \\ = (0,25)^6 + 6 \cdot 0,75 (0,25)^5 + 15 \cdot (0,75)^2 \cdot (0,25)^4 = 0,0376.$$

Пример 1.19. Вероятность p появления события A при каждом испытании равна 0,2. Производится 400 независимых испытаний. Определить вероятность $P_n(k)$ того, что: а) событие A наступит ровно 80 раз; б) событие A наступит от 60 до 96 раз включительно.

Решение.

а) Воспользуемся приближенной локальной формулой Муавра–Лапласа (1.24). По условию $n = 400$; $k = 80$; $p = 0,2$; $q = 0,8$. Следовательно,

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 0.$$

Тогда

$$P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} w(0).$$

По таблице (см. приложение I) находим $w(0) = 0,3989$. Окончательно получим

$$P_{400}(80) = \frac{1}{8} 0,3989 \approx 0,0499.$$

Формула (1.21) приводит примерно к такому же результату:

$$P_{400}(80) = 0,0498.$$

б) Для ответа на второй вопрос используем приближенную интегральную формулу Муавра–Лапласа (1.30)

$$P_{400}(60 \leq k \leq 96) = \Phi\left(\frac{96 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) - \Phi\left(\frac{60 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) = \\ = \Phi(2) - \Phi(-2,5) = \Phi(2) - [1 - \Phi(2,5)].$$

По таблице (см. приложение II) находим $\Phi(2) = 0,977$; $\Phi(2,5) = 0,994$. Следовательно, $P_{400}(60 < k < 96) = 0,977 - 1 + 0,994 = 0,991$.

Пример 1.20. Противотанковое оружие ведет стрельбу по танку. Всего производится 6 выстрелов, причем вероятность попадания в танк при каждом выстреле равна 0,3.

Рассчитать: а) наивероятнейшее число попаданий в танк; б) число выстрелов, необходимых для того, чтобы с вероятностью 0,9 поразить танк, если для этого достаточно одного попадания.

Решение.

а) Наивероятнейшее число попаданий k_0 находим по формуле (1.32). По условию $n = 6$; $p = 0,3$; $q = 1 - 0,3 = 0,7$. Следовательно,

$$6 \cdot 0,3 - 0,7 \leq k_0 < 6 \cdot 0,3 + 0,3,$$

т. е.

$$1,1 \leq k_0 < 2,1.$$

Между числами 1,1 и 2,1 заключено лишь одно целое число – два. Поэтому наивероятнейшее число $k_0 = 2$. б) Применив формулу (1.31), получим

$$n \geq \frac{\log(1-0,9)}{\log(1-0,3)} \approx 6,45.$$

Таким образом, для поражения танка с вероятностью 0,9 достаточно произвести 7 выстрелов.

Пример 1.21. Производится три независимых выстрела по одной и той же цели. Вероятность попадания при первом выстреле 0,3, при втором – 0,4 и при третьем – 0,5.

Определить вероятности промаха одного, двух и трех попаданий, т. е. $P_3(0)$, $P_3(1)$, $P_3(2)$, $P_3(3)$.

Решение. По условию $n = 3$; $p_1 = 0,3$; $q_1 = 1 - 0,3 = 0,7$; $p_2 = 0,4$; $q_2 = 0,6$; $p_3 = 0,5$ и $q_3 = 0,5$. Составляем производящую функцию, т. е. полином $<I_n(z)$:

$$\Phi_3(z) = \prod_{i=1}^3 (q_i + p_i z) = (0,7 + 0,3z)(0,6 + 0,4z)(0,5 + 0,5z) = \\ = 0,21 + 0,44z + 0,29z^2 + 0,06z^3.$$

Искомая вероятность $P_n(K)$ равна коэффициенту при z^K . Следовательно, $P_3(0) = 0,21$; $P_3(1) = 0,44$; $P_3(2) = 0,29$; $P_3(3) = 0,06$.

Пример 1.23. На участке обстрела находятся три цели. Вероятности p_i попадания в первую, вторую и третью цели соответственно равны $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,3$; $p_3 = 0,2$. По участку произведено 12 выстрелов.

Какова вероятность того, что в первую цель попадет 5 снарядов, во вторую – 4 и в третью – 2 снаряда?

Решение. По условию $n = 12$; $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,3$; $p_3 = 0,2$; $P_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3) = 1 - 0,9 = 0,1$; $k_1 = 5$; $k_2 = 4$; $k_3 = 2$; $k_4 = 12 - 5 - 4 - 2 = 1$. Здесь p_4 – вероятность попадания в область, находящуюся вне целей; k_4 – число попаданий в эту область.

Согласно формуле (1.35) искомая вероятность равна

$$P_{12}(5, 4, 2, 1) = \frac{12!}{5!4!2!1!} (0,4)^5 \cdot (0,3)^4 \cdot (0,2)^2 \cdot 0,1 \approx 0,0276.$$

§ 3. Задачи и ответы

1.1. Привести примеры двух событий: а) равновероятных и несовместных, но не образующих полной группы; б) несовместных и образующих полную группу, но неравновероятных; в) равно-вероятных и образующих полную группу, но несовместных.

1.2. Разведывательная пеленгаторная система состоит из четырех синхронно вращающихся антенн с неперекрывающимися диаграммами направленности (рис. 1.6), причем каждая антенна соединена со своим приемником. Длительность сигнала такова, что он не может быть обнаружен двумя приемниками.

Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 – соответственно события, состоящие в обнаружении сигнала первым, вторым, третьим и четвертым приемником.

Определить событие L , которое состоит в обнаружении сигнала пеленгаторной системой.

Ответ: $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$.

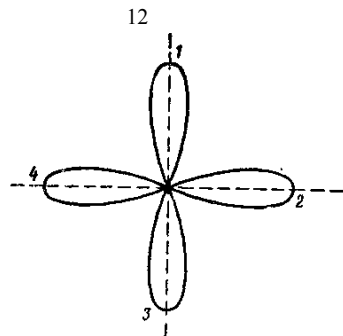


Рис. 1.6. Диаграммы направленности антенн.

1.3. Безотказная работа радиоэлектронного комплекса (событие Л) возможна при условии, если отсутствуют отказы в работе узла 1 (событие A_1), узла 2 (событие A_2), ..., узла n (событие A_n).

Найти связь события Л с частными событиями A_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Ответ: $A = A_1 A_2 \dots A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$.

1.4. Выбирается наугад случайная точка внутри квадрата, представленного на рис. 1.7. Пусть событие A – попадание случай-

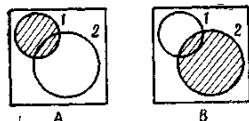


Рис. 1.7. События A и B .

ной точки в круг /, а событие B – попадание случайной точки в круг 2.

В каких соотношениях с событиями A и B находятся события C, D, E, F, G, H , изображенные на рис. 1.8?

Ответ: $C = \bar{A}; D = \bar{B}; E = A + B; F = AB; G = \overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}; H = \bar{A}\bar{B} = \bar{A} + \bar{B}$.

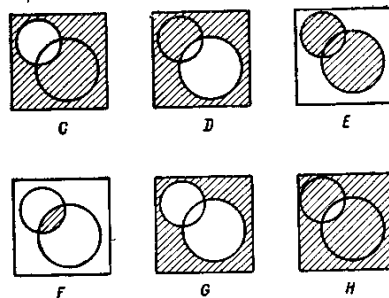


Рис. 1.8. События C, D, E, F, G, H .

1.5. Пусть A, B, C – три произвольных события.

Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A, B, C : а) произошло только событие A ; б) произошли события A и B , но C не произошло; в) все три события произошли; г) произошло по крайней мере одно из этих событий; д) произошло по крайней мере два события; е) произошло одно и только одно событие; ж) произошли два и только два события; з) ни одно событие не произошло; и) произошло не больше двух событий.

Ответ: а) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$; б) $\bar{A}BC$; в) ABC ; г) $A + B + C$; д) $AB + AC + BC$; е) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$; ж) $\bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} = (AB + AC + BC) - ABC$; з) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$; и) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

1.6. Производится пуск трех ракет по одной и той же цели. Пусть события A_1 – попадание при первом пуске, A_1 – промах при первом пуске, A_2 – попадание при втором пуске, A_2 – промах при втором пуске, A_3 – попадание при третьем пуске, A_3 – промах при третьем пуске.

Чему равно событие A , состоящее в том, что в цель попадет не менее двух ракет?

Ответ: $A = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$.

1.7. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. События: A_i ($i = 1, 2$) – исправен i -й блок первого типа, B_j ($j = 1, 2, 3$) – исправен j -й блок второго типа. Прибор работает, если исправны хотя бы один блок первого типа и не менее двух блоков второго типа.

Выразить событие C , означающее работу прибора, через события A_i и B_j .

Ответ: $C = (A_1 + A_2)(B_1 B_2 + B_1 B_3 + B_2 B_3)$.

1.8. Известны события A, B и C , причем $A \subset B$. Определить сложные события $AB, A + B, ABC$ и $A + B + C$.

Ответ: $AB = A; A + B = B; ABC = AC; A + B + C = A + C$.

1.9. Показать, что события:

а) $(A + B)(A + \bar{B}) + (\bar{A} + B)(\bar{A} + \bar{B})$ – достоверно; б) $(A + B) \times (A + \bar{B})(\bar{A} + B)(\bar{A} + \bar{B})$ – невозможно.

1.10. Доказать следующие равенства:

а) $A + B = A + \bar{A}B$; б) $\bar{A} + AB = \bar{A} + B$; в) $\bar{A} + \bar{B} = \overline{AB}$; г) $A + B = \overline{\bar{A}\bar{B}}$; д) $AB = \overline{\bar{A}\bar{B}}$.

1.11. Упростить выражения:

а) $A(B + C) + (A + B)C$; б) $(A + B)(A + \bar{B})$; в) $(A + B)(\bar{A} + B)(A + \bar{B})$; г) $(A + B)(\bar{A}\bar{B} + C) + \bar{C} + (A + B)(D + E)$.

Ответ: а) $AB + AC + BC$; б) A ; в) AB ; г) $A + B + \bar{C}$.

1.12. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность того, что выпадет: а) четное число очков; б) число очков, кратное трем; в) не более пяти очков.

Ответ: а) $1/2$; б) $1/3$; в) $5/6$.

1.13. Две однотипные радиостанции, разнесенные в пространстве относительно друг друга, предварительно настроены на 10 фиксированных частот, одинаковых у обеих станций.

Какова вероятность того, что при независимом произвольном выборе рабочих частот обе включенные радиостанции окажутся настроенными на одну и ту же частоту?

Ответ: 0,1.

1.14. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятность того, что: а) сумма выпавших очков равна 6; б) произведение выпавших очков равно 12; в) сумма выпавших очков кратна 5; г) на обеих костях выпадет по одинаковому числу очков; д) 5 очков появится хотя бы на одной грани.

Ответ: а) $5/36$; б) $1/9$; в) $7/36$; г) $1/6$; д) $11/36$.

1.15. В партии полевых транзисторов n доброкачественных и m бракованных. При контроле оказалось, что первые k транзисторов доброкачественны.

Определить вероятность P того, что следующий транзистор будет доброкачественным.

Ответ:

$$P = \frac{n - k}{n + m - k}.$$

1.16. На пяти одинаковых карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4 и 5. Две из них наугад вынимаются одна за другой.

Найти вероятность того, что: а) сумма цифр на вынутых карточках является нечетным числом; б) вторая цифра меньше первой; в) вторая цифра больше первой ровно на 1.

Ответ:

а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{5}$.

1.17. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад.

Определить вероятность P того, что набраны нужные цифры.

Ответ:

$$P = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{90}$$

1.18. Каждая из букв слова «интеграл» написана на одной из восьми карточек. Карточки перемешиваются.

Какова вероятность P того, что при извлечении трех карточек появится (в порядке их выхода) слово «три»?

Ответ:

$$P = \frac{1}{A_8^3} = \frac{1}{336}.$$

1.19. Каждая из цифр 1, 3, 5, 6 и 8 написана на одной из пяти карточек. Карточки перемешивают и раскладывают в ряд.

Найти вероятность того, что полученное пятизначное число будет делиться на четыре.

Ответ: 1/5

1.20. Из группы, содержащей n карточек, перенумерованных от 1 до n , извлекают по одной карточке.

Найти вероятность P того, что при n -кратном извлечении карточек их номера будут идти в возрастающем порядке, если: а) каждая вынутая карточка после просмотра ее номера возвращается обратно и карточки перемешиваются; б) извлеченные карточки обратно не возвращаются.

Ответ:

$$\text{а) } P = \frac{1}{n^n}; \quad \text{б) } P = \frac{1}{n!}.$$

1.21. В собираемый блок входят две одинаковые микросхемы. Технические условия нарушаются, если обе они окажутся с пониженной крутизной. У монтажника имеется 10 микросхем, из которых 3 с пониженной крутизной.

Определить вероятность нарушения технических условий при случайном выборе двух микросхем.

Ответ: 1/5.

1.22. В мастерской находится $a + b$ блоков от двух различных радиоприемников, из которых два повреждены.

Какова вероятность P того, что повреждены блоки разных приемников?

Ответ:

$$P = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

1.23. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимаются два шара.

Вычислить вероятность P того, что: а) оба шара будут белыми; б) оба вынутых шара будут черными; в) один шар будет белым, а второй – черным.

Ответ:

$$\text{а) } P = \frac{C_a^2}{C_{a+b}^2}; \quad \text{б) } P = \frac{C_b^2}{C_{a+b}^2}; \quad \text{в) } P = \frac{ab}{C_{a+b}^2}.$$

1.24. На десяти из двадцати карточек написана цифра 1, а на остальных десяти – цифра 0. Пять карточек вынимаются наугад.

Найти вероятность P того, что на двух карточках будет стоять цифра 1, а на трех – цифра 0 (безразлично, в каком порядке).

Ответ:

$$P = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{10}^3}{C_{20}^5}.$$

1.25. В урне a белых, b черных и c красных шаров. Из урны вынимают три шара.

Найти вероятность P того, что среди них не будет шаров одинакового цвета.

Ответ:

$$P = \frac{abc}{C_{a+b+c}^3}.$$

1.26. В круг радиуса R вписан квадрат. Какова вероятность P того, что точка, брошенная наудачу внутри круга, окажется внутри квадрата?

Ответ:

$$P = \frac{2}{\pi}.$$

1.27. Во время разговора абонента с телефонисткой продолжительностью t сек поступил новый вызов.

Определить вероятность того, что к моменту вызова прошла большая часть разговора абонента с телефонисткой.

Ответ: 1/2.

1.28. На отрезок AB длиной l наугад бросается точка M , причем вероятность попадания точки в какой-либо подынтервал отрезка AB не зависит от его положения внутри AB и пропорциональна его длине.

Чему равна вероятность P того, что: а) точка M упадет не дальше, чем на расстоянии a от середины отрезка AB ; б) площадь квадрата, построенного на AM , будет меньше $l^2/4$ и больше $l^2/9$?

$$\text{Ответ: а) } P = \begin{cases} \frac{2a}{l} & \text{при } 2a < l, \\ 1 & \text{при } 2a \geq l; \end{cases} \quad \text{б) } P = \frac{1}{6}.$$

1.29. Найти вероятность $P(A)$ подрыва корабля при форсировании минного заграждения в одну линию при интервале между минами l_m , ширине корабля a_m и диаметре мины d_m . Курс корабля составляет угол ρ с линией расположения мин.

$$\text{Ответ: } P(A) = \begin{cases} \frac{a+d}{l \sin \beta} & \text{при } \beta > \arcsin \frac{a+d}{l}, \\ 1 & \text{при } \beta \leq \arcsin \frac{a+d}{l}. \end{cases}$$

1.30. Радиопульсы сигнала $s(t)$ и гармонической помехи $n(t)$ одинаковой частоты заполнения совпали во времени.

Определить вероятность $P(A)$ того, что результирующая амплитуда суммы сигнала и помехи окажется меньше произвольно заданного уровня U_0 ($0 \leq U_0 \leq U_s$), если сдвиг фаз между высокочастотными колебаниями импульсов является случайным и может с одинаковой вероятностью быть равным любому значению из интервала $0 \div -2\pi$.

Ответ [5]:

$$P(A) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_0^2 - (U_s - U_n)^2}{U_s U_n}} & \text{при } |U_s - U_n| < U_0, \\ 0 & \text{при } |U_s - U_n| \geq U_0, \end{cases}$$

где U_s — амплитуда сигнала, U_n — амплитуда помехи.

1.31. Посадочная система аэропорта обеспечивает заход на посадку в сложных метеословиях с интервалом между посадками самолетов не менее 5 мин. Два самолета должны прибыть на аэродром по расписанию: один в 10 ч, а другой в 10 ч 10 мин.

Какова вероятность того, что второму самолету придется уходить в зону ожидания, если первый самолет может выйти на аэродром с отклонением от расписания в пределах ± 10 мин, а второй – в пределах ± 5 мин, при условии, что величины отклонений от расписания в указанных пределах равновероятны?

Ответ: 0,25.

1.32. На отрезок AB длиной l бросают наугад и независимо друг от друга две точки L и M , причем вероятность попадания каждой точки в какой-либо интервал, принадлежащий AB , не зависит от его положения внутри AB и пропорциональна его длине.

Определить вероятность P того, что: а) расстояние между точками L и M будет не больше a , б) точка L окажется ближе к точке A , чем точка M ; в) точка L окажется ближе к M , чем к A .

$$\text{Ответ: а) } P = 1 - \left(1 - \frac{a}{l}\right)^2; \quad \text{б) } P = \frac{1}{2}; \quad \text{в) } P = \frac{3}{4}.$$

1.33. Искусственный спутник Земли (ИСЗ) движется по орбите, которая заключена между 60° северной и 60° южной широты. Полагая падение ИСЗ в любую точку поверхности Земли между указанными параллелями равновероятным, найти вероятность того, что спутник упадет выше 30° северной широты.

Ответ: 0,21.

1.34. Панорамный приемник периодически с постоянной скоростью проходит некоторый

диапазон частот $(f_1; f_2)$, где возможно появление сигнала, за которым установлено наблюдение. Полоса пропускания приемника определяется допустимой расстройкой относительно сигнала $\pm \Delta f$.

Считая сигнал импульсным (изображенным точкой как на оси времени, так и на оси частот), появление его равновероятным в любой момент и в любой точке интервала $(f_1 - \Delta f, f_2 + \Delta f)$, определить: а) вероятность P_1 обнаружения сигнала; б) вероятность P_2 пеленга (засечки) передатчика, если известна частота сигнала, а антенна пеленгатора равномерно вращается, причем угол раствора диаграммы направленности антенны $\beta = 18^\circ$; в) вероятность P_3 обнаружения сигнала, если сигнал не является импульсным, а имеет конечную длительность τ_n (считая, что регистрация сигнала приемником происходит мгновенно); г) вероятность P_4 определения пеленга, если сигнал имеет длительность τ_n , и за время τ_n антенна пеленгатора поворачивается на угол $0,5\beta$.

Ответ :

$$\text{а) } P_1 = \frac{2\Delta f}{f_2 - f_1 + 2\Delta f}; \quad \text{б) } P_2 = \frac{1}{20};$$

$$\text{в) } P_3 = \frac{2\Delta f T + 2\tau_n(f_2 - f_1)}{(f_2 - f_1 + 2\Delta f)T + 2\tau_n(f_2 - f_1)},$$

где T – время прохождения приемником диапазона (f_1, f_2) ; г) $P_4 = 0,075$.

1.35. На склад поступили три партии резисторов. В первой партии 2000, во второй – 2000 и в третьей – 4000 резисторов. Предполагаемый процент брака в партиях составляет соответственно 1, 2 и 3%.

Каков предполагаемый процент брака у смешанной партии?

Ответ: 2,25%.

1.36. Контролер проверяет взятые наудачу изделия из партии, содержащей a изделий 1-го сорта и b изделий 2-го сорта. Проверка первых m изделий ($m < b$) обнаружила, что все они второго сорта.

Определить вероятность P того, что из следующих четырех проверяемых изделий по крайней мере два окажутся второсортными.

Ответ:

$$P = \frac{C_{b-m}^2 C_a^2 + a C_{b-m}^3 + C_{b-m}^4}{C_{a+b-m}^4}.$$

1.37. Из упаковки, содержащей n транзисторов, взят по крайней мере один транзистор. Вычислить вероятность P того, что взято четное число транзисторов, если равновероятно извлечение любого числа транзисторов из данной совокупности?

Ответ:

$$P = \frac{C_n^2 + C_n^4 + \dots}{C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n} = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}.$$

1.38. На вход радиоприемного устройства поступают двоичные кодовые комбинации, состоящие из двух символов: 1 и 0.

Какова вероятность того, что в первой кодовой комбинации будет хотя бы один нуль, если появление нуля и единицы равновероятно?

Ответ: 3/4.

1.39. В упаковке содержится 36 транзисторов, среди которых 4 с пониженной крутизной. Для проверки наугад выбирают 3 транзистора.

Найти вероятность того, что среди проверяемых транзисторов будет хотя бы один с пониженной крутизной.

Ответ: 0,305.

1.40. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одному разу в цель. Вероятность попадания в цель для первого стрелка 0,8, а для второго – 0,9.

Какова вероятность попадания в цель?

Ответ: 0,98.

1.41. Радиосигналы принимаются двумя разнесенными приемниками. Вероятность правильного приема приемником равна P_1 , вторым – P_2 . События, состоящие в приеме сигналов каждым приемником, считаются независимыми.

Определить вероятность P правильного приема радиосигналов.

Ответ:

$$P = 1 - (1 - P_1)(1 - P_2).$$

1.42. Вероятность ухода частоты принимаемых колебаний за пределы полосы пропускания приемника из-за нестабильности частоты колебаний передатчика равна 0,1, а из-за нестабильности частоты колебаний гетеродина приемника – 0,2.

Определить вероятность того, что частота принимаемых колебаний не выйдет за пределы полосы пропускания приемника.

Ответ: 0,72.

1.43. Две станции дальней радиосвязи с использованием эффекта рассеяния ультракоротких волн метеорными следами одновременно ведут работу на одного корреспондента. Вероятность «прохождения» радиосигналов первой станции, работающей на волне λ_1 равна 0,7; вероятность «прохождения» сигналов второй станции, работающей на волне λ_2 , равна 0,8.

Определить вероятность «прохождения» связи при одновременной работе обеих радиостанций.

Ответ: 0,94.

1.44. Вероятность вывода истребителя-перехватчика наземными системами наведения в определенный район около цели равна 0,8. Вероятность обнаружения цели бортовой радиолокационной станцией истребителя в этом районе равна 0,9.

Какова вероятность того, что перехват цели будет осуществлен?

Ответ: 0,72.

1.45. В студии имеются три телевизионных камеры. Вероятность того, что каждая камера включена в данный момент, равна 0,6.

Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера.

Ответ: 0,936.

1.46. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий соответственно равны: 0,8; 0,7; 0,9.

Вычислить вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех орудий.

Ответ: 0,994.

1.47. Для изготовления детали необходимы три основные операции. Вероятность брака на первой операции равна 0,01, на второй – 0,02 и на третьей – 0,025.

Определить вероятность изготовления стандартной детали при условии, что появление брака на отдельных операциях – события независимые.

Ответ: 0,946.

1.48. При передаче текста 10% букв искажаются и принимаются неверно.

Какова вероятность того, что все пять букв данного слова будут приняты правильно?

Ответ: 0,59.

1.49. Цех в среднем выпускает 2% бракованных деталей. Из каждой сотни годных деталей в среднем 70 оказываются первого сорта.

Найти вероятность того, что деталь, изготовленная в цехе, окажется первого сорта.

Ответ: 0,686.

1.50. Вероятность попадания авиабомбы в цель равна 0,2. Найти вероятность поражения цели тремя бомбами, если 2% сброшенных бомб не взрываются.

Ответ: 0,48.

1.51. По каналу связи передаются два сигнала: нуль и единица. Из-за наличия помех могут возникнуть искажения: посланный сигнал подвергается искажению с вероятностью 1/100 и принимается правильно с вероятностью 99/100 (независимо от того, были ли переданы предшествующие сигналы с искажением или без искажения).

Зная, что послана комбинация 10110, найти вероятность того, что: а) она получена без искажений; б) получена комбинация 11110; в) в полученной комбинации имеется одно искажение.

Ответ: а) $0,99^5$, б) $0,01 \cdot 0,99^4$, в) $0,05 \cdot 0,99^4$.

1.52. Электрическая цепь подсвета приборной доски состоит из 8 последовательно включенных лампочек. Вероятность того, что каждая из них будет гореть в течение 1000 ч, равна 0,9.

Чему равна вероятность P того, что цепь не выйдет из строя за этот промежуток времени?

Ответ: $= 0,9^8 = 0,430$.

1.53. Радиотехническое устройство содержит n_1 ламп, n_2 транзисторов и n_3 предохранителей. Выход любой детали из строя приводит к неисправности устройства. Вероятность выхода из строя за время T одной из ламп q_1 , транзистора q_2 , предохранителя q_3 .

Какова вероятность Q того, что за время T устройство выйдет из строя?

Ответ: $Q = 1 - (1 - q_1)^{n_1} (1 - q_2)^{n_2} (1 - q_3)^{n_3}$.

1.54. Радиорелейная линия связи состоит из m ретрансляционных станций. Надежность (вероятность безотказной работы) каждой станции одинакова. Станции выходят из строя независимо друг от друга, причем отказ любой станции влечет за собой отказ всей системы связи.

Определить вероятность p_1 безотказной работы каждой станции за промежуток времени T , если надежность всей линии связи за этот промежуток времени должна быть не менее P .

Ответ: $p_1 \geq P^{\frac{1}{m}}$.

1.55. Шкала радиоприемного устройства освещается четырьмя параллельно включенными лампочками. Вероятность того, что каждая из лампочек будет гореть в течение 1500 ч, равна 0,9.

Какова вероятность того, что шкала будет освещена в течение этих 1500 ч, если лампочки, которые выйдут из строя за указанный промежуток времени, не будут заменены доброкачественными?

Ответ: 0,9999.

1.56. Электрическая цепь (рис. 1.9) состоит из n групп, в каждой из которых имеется k параллельных ветвей. Вероятность перегорания за время T одного элемента ветви равна q .

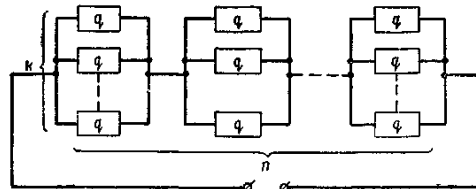


Рис. 1.9. Электрическая цепь.

Найти вероятность P того, что в течение интервала времени 0 - T ток в цепи будет отличен от нуля.

Ответ: $P = (1 - q^k)^n$.

1.57. Радиоэлектронный блок состоит из трех параллельных цепей, каждая из которых включает в себя четыре последовательно соединенных элемента. Две цепи являются резервными. Надежность элементов в основной цепи 0,97, в резервных цепях 0,92.

Определить надежность блока.

Ответ: 0,991.

1.58. Разрыв электрической цепи может произойти вследствие выхода из строя элемента k или двух элементов k_1 и k_2 . Вероятность выхода из строя элемента k равна $q_k = 0,3$, а для элементов k_1 и k_2 равна $q_1 = q_2 = 0,2$.

Определить вероятность разрыва электрической цепи.

Ответ: 0,328.

1.59. Система состоит из пяти элементов; надежность ρ каждого элемента равна 0,8. Работа каждого элемента необходима для работы системы в целом.

Для повышения надежности системы предлагается три метода: а) резервирование каждого элемента (рис. 1.10);

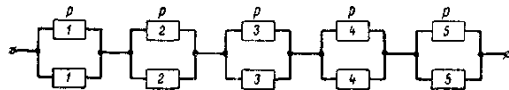


Рис. 1.10. Система с поэлементным резервированием.

б) резервирование системы в целом (рис. 1.11);

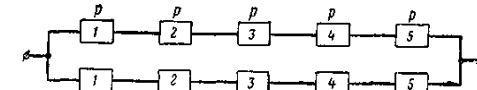


Рис. 1.11. Дублированная система.

в) резервирование блоками (рис. 1.12).

Вычислить надежность системы при всех способах резервирования (надежность переключающих устройств считать равной единице).

Ответ: а) 0,815; б) 0,548; в) 0,663.

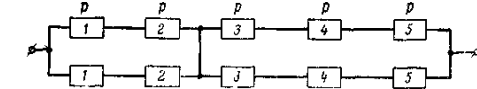


Рис. 1.12. Система с резервированием отдельных блоков.

1.60. Между корреспондентами M и N происходит обмен информацией по схеме, приведенной на рис. 1.13, где k_1 и k_2 – оконечная аппаратура, а L_1, L_2, L_3 – каналы, взаимно резервирующие друг друга. Выходы из строя элементов схемы – независимые события. Вероятности безотказной работы элементов k_1, k_2, L_1, L_2, L_3 за время T соответственно равны 0,8; 0,7; 0,9; 0,6; 0,5.

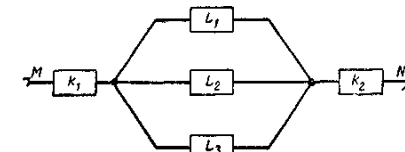


Рис. 1.13. Система передачи информации с тремя параллельными каналами.

Какова вероятность того, что за время T связь не прервется?

Ответ: 0,549.

1.61. Связная самолетная радиостанция может работать в трех режимах по мощности: полной, половинной и составляющей 25% полной мощности. Вероятности работы радиостанции в этих режимах соответственно равны: 0,7; 0,1; 0,2. Вероятности отказа радиостанции при работе в этих режимах за время T составляют соответственно величины 0,3; 0,2; 0,05.

Определить вероятность того, что за T часов работы радиостанция не выйдет из строя.

Ответ: 0,76.

1.62. На конвейер поступают для сборки детали, изготавливаемые на двух станках, причем с первого станка поступает 40% от общего количества и со второго – 35%. Вероятности изготовления нестандартной детали на этих станках равны: на первом – 0,01; на втором – 0,02.

Какова вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется нестандартной?

Ответ: 0,011.

1.63. Каждое из n орудий наведено на цель. Произвольно выбирается орудие и производится выстрел.

Определить вероятность P того, что снаряд попадет в цель, если вероятности попаданий орудий равны p_1, p_2, \dots, p_n .

$$P = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n}$$

Ответ:

1.64. Команда состоит из двух отличных, двух хороших и четырех посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,9, для хорошего – 0,7 и для посредственного – 0,5. Наугад вызываются два стрелка, причем каждый из них стреляет один раз.

Какова вероятность того, что оба стрелка попадут в цель?

Ответ: 0,418.

1.65. Три истребителя-перехватчика независимо один от другого атакуют бомбардировщик противника. Вероятности обнаружения бомбардировщика первым, вторым и третьим истребителями соответственно равны 0,6; 0,7 и 0,8. Если бомбардировщик обнаружен, то первый истребитель сбивает его с вероятностью 0,2; второй и третий – с вероятностью 0,15.

Найти вероятность того, что бомбардировщик будет сбит.

Ответ: 0,345.

1.66. В урне находится два белых и четыре черных шара. Из урны извлекают два шара, цвет которых остается неизвестным, и откладывают их в сторону, после чего вынимают третий шар.

Какова вероятность того, что последний шар белый?

Ответ: 1/3.

1.67. Кинескоп, поставленный в телевизор, может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями p_1 , p_2 и p_3 , где $p_1=p_3=0,25$, $p_2=0,5$. Вероятности того, что он проработает заданное число часов для этих партий, соответственно равны 0,1; 0,2 и 0,4.

Определить вероятность того, что кинескоп проработает заданное число часов.

Ответ: 0,225.

1.68. По каналу связи передаются два сигнала: ноль и единица. Из-за наличия помех возможны искажения сигналов: единица переходит в единицу с вероятностью p и в ноль с вероятностью $1-p$; ноль переходит в ноль с вероятностью q и в единицу с вероятностью $1-q$. Наугад отправлен сигнал.

Вычислить вероятность P того, что: а) на приемном конце будет получен сигнал 1; б) на приемном конце будет получен сигнал 0.

Ответ: а) $P=1/2(1+p-q)$; б) $P=1/2(1-p+q)$.

1.69. Вероятности перегорания первой, второй и третьей ламп равны соответственно 0,1, 0,2 и 0,3. Вероятности выхода из строя прибора при перегорании одной, двух и трех ламп равны соответственно 0,25; 0,6 и 0,9.

Определить вероятность выхода прибора из строя.

Ответ: 0,16.

1.70. Самолет, вылетающий на задание, создает радиопомехи, которые с вероятностью 0,4 «забивают» радиосредства системы ПВО. Если радиосредства «забиты», то самолет проходит к объекту необстрелянным, сбрасывает бомбы и поражает объект с вероятностью 0,8. Если радиосредства системы ПВО «не забиты», то самолет подвергается обстрелу и сбивается с вероятностью 0,7.

Найти вероятность того, что объект будет разрушен.

Ответ: 0,464.

1.71. Для повышения надежности и улучшения качества радиосвязи в условиях замираний прием сообщений корреспондента осуществляется на два приемника, пространственно разнесенных друг относительно друга (пространственно разнесенный прием). Вероятность приема сигнала первым радиоприемником равна 0,8, вторым – 0,7, а при одновременной работе обоих приемников – 0,94

Определить вероятность приема радиосигнала корреспондента, если вероятность безотказной работы за время сеанса связи первого приемника составляет 0,9, второго – 0,85, а радиостанции корреспондента – 0,8.

Ответ: 0,708.

1.72. По каналу связи, состоящему из передатчика, ретранслятора и приемника, передаются два сигнала: единица и ноль. За счет воздействия помех сигналы могут искажаться. На участке передатчик – ретранслятор единица переходит в единицу с вероятностью p_1 и в ноль с вероятностью $1-p_1$; ноль переходит в ноль с вероятностью q_1 и в единицу с вероятностью $1-q_1$. На участке ретранслятор – приемник указанные вероятности соответственно равны p_2 ; $1-p_2$; (q_2 и $1-q_2$).

Найти вероятность P того, что комбинация 10, посланная передатчиком, будет принята приемником без искажений.

Ответ: $P=[p_1 p_2 + (1-p_1)(1-q_2)][q_1 q_2 + (1-q_1)(1-p_2)]$.

1.73. Бомбометание с данного типа самолета выполняется на 45% с высоты h_1 , 30% с высоты h_2 и 25% с высоты h_3 . Вероятности поражения цели с этих высот при сбрасывании одной бомбы соответственно равны 0,2; 0,3; 0,4. На цель при заданной высоте сбрасываются три бомбы. Высота бомбометания заранее неизвестна. Для поражения цели необходимо не менее одного попадания.

Определить вероятность поражения цели.

Ответ: 0,613

1.74. Группа, состоящая из трех самолетов-разведчиков, действующих независимо один от другого, высылаются в район расположения войск противника с целью уточнить координаты объекта, который предлагается обстрелять ракетами. Всего по объекту предполагается выпустить три ракеты. Если координаты цели не уточнены, одна ракета уничтожает объект с вероятностью 0,2; если уточнены – с вероятностью 0,7. Перед выходом в разведываемый район каждый самолет-разведчик проходит зону действия ПВО противника; вероятность того, что в этой зоне он будет сбит, равна 0,6. Координаты объекта сообщаются разведчиками по радио.

Определить: а) вероятность того, что объект будет уничтожен баллистическими ракетами с учетом деятельности разведки; б) вероятность уничтожения объекта, при условии, что самолеты не имеют радиосвязи со своей базой и для сообщения разведывательных данных должны вторично пересечь зону действия ПВО.

Ответ: а) 0,868; б) 0,686.

1.75. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Вероятность поражения цели при одном попадании равна 0,1; при двух попаданиях – 0,3; при трех попаданиях – 0,6. Произведено три выстрела, в результате которых цель была поражена.

Каково наиболее вероятное число попаданий?

Ответ: два попадания.

1.76. Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенная система контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98, а изделия, не удовлетворяющие стандарту, пропускает (как годные) с вероятностью 0,05.

Определить вероятность того, что изделие, прошедшее контроль как годное, действительно удовлетворяет стандарту.

Ответ: 0,998.

1.77. Самолет может выполнять задание на больших, средних и малых высотах, причем на больших высотах предполагается совершить 25% всех полетов, на средних – 10% и на малых – 65%. Вероятности выхода самолета на заданный объект на больших, средних и малых высотах соответственно равны 0,75; 0,9; 0,65. Самолет вышел на заданный объект.

Определить вероятность того, что полет происходил на малой высоте.

Ответ: 0,604.

1.78. По двоичному каналу связи с шумами, схематически изображенному на рис. 1.14, передаются токовая (1) и бестоковая (0) посылки с априорными вероятностями $p(1)=0,6$ и $p(0)=0,4$. Из-за наличия помех возможны искажения сигналов: вероятность перехода единицы в единицу (вероятность принять единицу при передаче единицы) $p(1/1)=0,9$; вероятность перехода единицы в ноль $p(0/1)=0,1$; вероятность перехода нуля в ноль $p(0/0)=0,8$ и вероятность перехода нуля в единицу $p(1/0)=0,2$. На выходе радиоприемного устройства зарегистрирована единица.

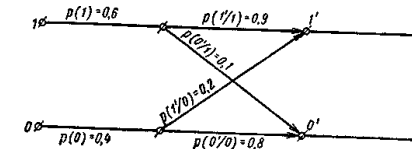


Рис. 1.14 Двоичный канал связи.

Какова вероятность того, что: а) в действительности была передана 1; б) на самом деле был передан 0.

Ответ: а) 0,87; б) 0,13.

1.79. Три самолета производят одиночное бомбометание по некоторой цели. Каждый самолет сбрасывает одну бомбу. Вероятность попадания в цель при сбрасывании одной бомбы для первого самолета равна 0,1; для второго самолета – 0,2 и для третьего – 0,3. В результате бомбометания в цель попали две бомбы.

Определить вероятность того, что в цель попали бомбы, сброшенные с первого и второго самолетов.

Ответ: 7/46

1.80. В каждой из трех одинаковых упаковок содержится по 10 деталей, причем в первой упаковке 8 стандартных деталей и 2 бракованные; во второй – 9 стандартных и 1 бракованная; в

третьей одни стандартные. Выбираются наудачу 3 детали из одной упаковки.

Определить вероятность того, что извлечение производилось и второй упаковки, если известно, что среди отобранных оказались 2 стандартные и 1 бракованная детали.

Ответ: 9/23

1.81. Из партии в пять изделий наудачу взято одно изделие оказавшееся бракованным. Количество бракованных изделий равновероятно любое.

Какое предположение о количестве бракованных изделий наиболее вероятно?

Ответ: пять бракованных изделий.

1.82. Вероятности того, что при одном выстреле из орудия получают недолет, попадание и перелет, равны 0,1; 0,7; 0,2. Для другого орудия вероятности этих событий равны соответственно 0,2; 0,6 и 0,2. Наугад выбранное орудие стреляет трижды. Отмечено одно попадание, один недолет и один перелет.

Найти вероятность того, что стреляло первое орудие.

Ответ: 7/19

1.83. Алфавит источника сигналов состоит из 10 равновероятных кодовых комбинаций, причем каждый раз в линию связи посылается одна из них.

Какова вероятность того, что в результате пятикратной передачи одна и та же кодовая комбинация появится не менее трех раз.

Ответ: 0,00856.

1.84. Для увеличения надежности радиосвязи используется метод накопления, при котором каждый символ (0 или 1) передается три раза подряд. На приемной стороне регистрируется тот символ, который в принятой последовательности из трех символов содержится не менее двух раз.

Определить вероятность правильного приема по методу накопления, если вероятность правильного приема каждого символа равна 0,9.

Ответ: 0,972.

1.85. Импульсно-кодовая комбинация образуется с помощью шести двоичных сигналов 0 или 1, которые случайным образом появляются на позициях кодовой комбинации независимо друг от друга. Появление сигналов 0 или 1 на каждой позиции равновероятно. Вычислить вероятность того, что в кодовой комбинации число нулей будет меньше двух.

Ответ: 7/64

1.86. Из 150 изделий, среди которых 50 штук второго сорта, отбирается 6 изделий по схеме возвращенного шара (повторная выборка).

Определить вероятность того, что среди изделий, попавших в выборку, будет не более двух изделий второго сорта.

Ответ: 0,68.

1.87. Радиоприемник содержит 9 полупроводниковых приборов, для которых вероятность брака равна 0,05.

Найти вероятность того, что приемник будет не работоспособным, если он отказывает при наличии в нем не менее двух бракованных полупроводниковых приборов.

Ответ: 0,073.

1.88. При вращении антенны обзорного радиолокатора за время облучения от цели успевает отразиться 8 импульсов. Для обнаружения цели необходимо, чтобы через приемник на индикатор прошло не менее 6 отраженных импульсов. Вероятность подавления импульса шумом в приемнике равна 0,1.

Вычислить вероятность обнаружения цели за один оборот антенны радиолокатора.

Ответ: 0,96.

1.89. Прибор выходит из строя, если в нем откажет не менее пяти датчиков I-го типа или не менее двух датчиков II-го типа. В приборе отказало пять датчиков.

Определить вероятность того, что прибор будет работать, если вероятности отказа датчиков I и II типов соответственно равны 0,7 и 0,3.

Ответ: 0,36.

1.90. Радиоэлектронный комплекс самолета-бомбардировщика включает в себя 10 объектов. Вероятность безотказной работы каждого объекта в течение времени T равна 0,9. Объекты выходят из строя независимо один от другого.

Вычислить вероятность того, что за время T : а) откажет хотя бы один объект; б) откажут ровно два объекта; в) откажут не менее двух объектов.

Ответ: а) 0,652; б) 0,194; в) 0,264.

1.91. По самолету выполняется четыре независимых выстрела. Вероятность попадания в самолет при одном выстреле равна 0,1. Чтобы вывести самолет из строя, достаточно трех попаданий. При попадании одного снаряда вероятность вывода самолета из строя равна 0,5, а при попадании двух снарядов – 0,8.

Найти вероятность того, что самолет будет выведен из строя.

Ответ: 0,188.

1.92. Пункт A нужно связать с 10 абонентами пункта B . Каждый абонент в среднем занимает линию 12 мин в 1 ч. Вызовы любых двух абонентов независимы.

Какое минимальное количество каналов N необходимо для того, чтобы с вероятностью 0,99 в любой момент обслужить всех абонентов?

Ответ: $N = 5$.

1.93. На ограничитель поступает последовательность из восьми случайных по амплитуде независимых видеоимпульсов. Вероятность превышения порога ограничения каждым импульсом равна 0,25.

Вычислить: а) вероятность того, что из 8 импульсов не менее 6 видеоимпульсов превысят порог; б) наивероятнейшее число видеоимпульсов, превысивших порог.

Ответ: а) 0,00422; б) 2.

1.94. При одном заходе на цель бомбардировщик сбрасывает одну бомбу. Вероятность попадания в цель при сбрасывании одной бомбы равна 0,3. Для поражения цели достаточно одного попадания.

Сколько заходов n нужно сделать бомбардировщику, чтобы с вероятностью не менее 0,99 быть уверенным в поражении цели?

Ответ: $n > 13$.

1.95. Вероятность того, что изготовленное изделие удовлетворяет стандарту, равна 0,95.

Найти наиболее вероятное число изделий, не удовлетворяющих стандарту, в партии, содержащей 400 изделий.

Ответ: 20.

1.96. Вероятность попадания в самолет при одном выстреле равна 0,01. По самолету производится 100 независимых выстрелов.

Определить вероятность двух попаданий в самолет.

Ответ: $P_{100}(2) \approx 0,184$.

1.97. В передаваемой по каналу связи последовательности знаков, образующих сообщение, любой знак из-за помех независимо искажается с вероятностью 0,2. Независимым образом передано 10 000 знаков.

Какова вероятность того, что в принятой последовательности будет от 2000 до 2100 искажений?

Ответ: 0,494.

1.98. Доля изделий первого сорта в продукции завода составляет 60%.

Какова вероятность того, что из отобранных 500 изделий окажется от 310 до 330 изделий первого сорта?

Ответ: 0,177.

1.99. Трехорудийная батарея с вероятностями попадания из каждого орудия 0,3; 0,4; 0,5 дает залп.

Определить вероятность поражения цели, если для этого достаточно: а) одного попадания; б) двух попаданий; в) трех попаданий.

Ответ: а) 0,79; б) 0,35; в) 0,06.

1.100. По объекту производится стрельба ракетами с четырех позиций; с каждой позиции выпускается по одной ракете. Вероятности попадания при стрельбе с различных позиций равны соответственно 0,3; 0,4; 0,5 и 0,6.

Найти вероятность того, что: а) в объект попадет одна, две, три и четыре ракеты; б) в объект попадет не менее трех ракет.

Ответ: а) 0,302; 0,380; 0,198; 0,036; б) 0,234.

1.101. Вероятности разрегулировки датчика опорных частот, передатчика, приемника и антенно-фидерного тракта за время T работы радиостанции соответственно равны 0,4; 0,2; 0,3; 0,3.

Определить вероятность отказа радиостанции за время T , если из-за разрегулировки одного блока радиостанция отказывает с вероятностью 0,3; двух блоков – 0,5; трех блоков – 0,7; четырех блоков – 0,9.

Ответ: 0,316.

1.102. По линии связи передано четыре радиосигнала, имеющих различные амплитуды. Вероятности приема каждого из сигналов не зависят от приема остальных и соответственно равны 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.

Определить вероятность того, что: а) будет принято k сигналов ($k = 0, 1, 2, 3, 4$); б) будет установлена двухсторонняя радиосвязь, если вероятность этого события при приеме одного сигнала равна 0,2, при приеме двух сигналов – 0,6, а при приеме трех и четырех сигналов – единице.

Ответ: а) 0,168; 0,394; 0,320; 0,106; 0,012; б) 0,389.

1.103. Какова вероятность того, что при бросании двенадцати игральных костей каждая грань выпадет дважды?

Ответ: 0,0034.

1.104. Девяти радиостанциям разрешена работа на 3 волнах: λ_1, λ_2 и λ_3 . Выбор волны на каждой станции производится случайным образом.

Какова вероятность того, что на каждой из волн будет работать точно 3 станции?

Ответ: 0,0854.

1.105. Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одна от другой 4 торпеды. Для одной торпеды вероятность потопления корабля равна 0,5; вероятность повреждения – 0,25 и вероятность промаха равна 0,25. Корабль тонет уже от двух повреждений.

Определить вероятность того, что корабль будет затоплен.

Ответ: 0,982.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 1. Теоретические сведения

6

Случайной величиной называется такая переменная величина, которая в результате опыта может принимать то или иное заранее неизвестное значение. Различают два основных типа случайных величин: дискретные и непрерывные. Дискретная случайная величина X может принимать конечное или бесконечное счетное множество значений x_i (их можно пронумеровать). Возможные значения непрерывных случайных величин не могут быть заранее перечислены и непрерывно заполняют некоторый промежуток или даже всю ось.

Часто встречаются случайные величины смешанного типа, которые наряду с непрерывным заполнением некоторого промежутка могут принимать и отдельные дискретные значения.

Полной статистической характеристикой случайной величины является закон распределения вероятностей. В случае дискретной случайной величины X под ним понимается соотношение, устанавливающее зависимость между возможными значениями x_i дискретной случайной величины и их вероятностями $p_i = P(x_i)$.

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать в различных формах: табличной (ряд распределения), графической (многоугольник распределения), аналитической (в виде формулы).

Универсальной характеристикой, одинаково пригодной как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин, является функция распределения $F_1(X)$, определяющая вероятность P того, что случайная величина X не превысит некоторое число x :

$$F_1(x) = P(X \leq x).$$

Функцию распределения $F_1(x)$ иногда называют также интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

$$1) F_1(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_1(x) = 0;$$

Плотность вероятности для дискретной случайной величины можно записать так:

$$W_1(x) = \sum_{i=1}^n p_i \delta(x - x_i),$$

где x_i – возможные значения случайной величины X ,

p_i – вероятности возможных значений x_i ; $\delta(x - x_i)$ – дельта-функция (функция Дирака).

Дельта-функция обладает следующими свойствами:

$$\left. \begin{aligned} \delta(z - z_0) &= \begin{cases} \infty & \text{при } z = z_0, \\ 0 & \text{при } z \neq z_0, \end{cases} \\ \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} \delta(z - z_0) dz &= 1 \text{ при любом } \varepsilon > 0, \\ \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} f(z) \delta(z - z_0) dz &= f(z_0), \\ \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} \delta(z - z_0) dz &= \int_{z_0}^{z_0 + \varepsilon} \delta(z - z_0) dz = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \right\}$$

Систему нескольких случайных величин можно рассматривать как точку в n -мерном пространстве со случайными координатами. Поэтому систему n случайных величин часто называют n -мерным случайным вектором или n -мерной случайной величиной. При $n=2$ система случайных величин может интерпретироваться как случайная точка на плоскости, а при $n=3$ – как случайная точка в пространстве.

Полными вероятностными характеристиками системы случайных величин являются законы распределения вероятностей, задаваемые функцией распределения или плотностью вероятности. В статистической радиотехнике большое практическое значение имеют системы непрерывных случайных величин, распределение которых обычно характеризуют не функцией распределения, а плотностью вероятности.

Функцией распределения $F_2(x, y)$ системы двух случайных величин X, Y (иначе, совместной или двумерной функцией распределения) называется вероятность одновременного выполнения двух неравенств $X < x, Y < y$, рассматриваемая как функция переменных x и y .

$$F_2(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

В геометрической интерпретации (рис. 2.2) функцию распределения $F_2(x, y)$ можно трактовать как вероятность попадания случайной точки внутрь бесконечного левого нижнего квадранта с вершиной (x, y) .

Если функция распределения $F_2(x, y)$ непрерывна и обладает непрерывной смешанной производной второго порядка, то двумерная плотность вероятности $W_2(x, y)$ определяется формулой

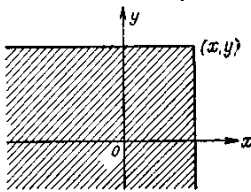
$$W_2(x, y) = \frac{\partial^2 F_2(x, y)}{\partial x \partial y}.$$


Рис. 2.2. К определению функции распределения.

Функции $F_2(x, y)$ и $W_2(x, y)$ обладают следующими основными свойствами:

- 1) $F_2(x, y)$ — неубывающая функция своих аргументов;
- 2) $F_2(x, -\infty) = F_2(-\infty, y) = F_2(-\infty, -\infty) = 0$;
- 3) $F_2(\infty, \infty) = 1$;
- 4) $F_2(x, \infty) = F_1(x), F_2(\infty, y) = F_1(y)$,

где $F_1(x)$ и $F_1(y)$ — соответственно функции распределения случайных величин X и Y ;

5) функция распределения $F_2(x, y)$ выражается через плотность вероятности $W_2(x, y)$ при помощи двойного интеграла:

$$F_2(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y W_2(u, v) du dv;$$

- 6) $W_2(x, y) \geq 0$;
- 7) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dx dy = 1$ (условие нормировки);

8) вероятность $P(R)$ попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник R (рис. 2.3) сторонами, параллельными осям координат, и с координатами вершин $A(x_1, y_1), B(x_2, y_1), C(x_2, y_2), D(x_1, y_2)$ равна

$$P(R) = P(x_1 \leq X < x_2, y_1 \leq Y < y_2) = F_2(x_2, y_2) - F_2(x_1, y_2) - F_2(x_2, y_1) + F_2(x_1, y_1);$$

9) вероятность $P(D)$ попадания случайной точки в произвольную область D (рис. 2.4) определяется формулой

$$P(D) = \iint_D W_2(x, y) dx dy.$$

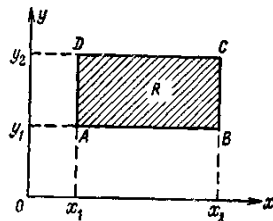


Рис. 2.3. Прямоугольная область.

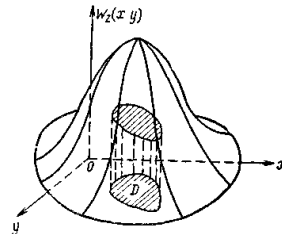


Рис. 2.4. Область D.

Плотность вероятности $w_2(x, y)$ для системы двух нормальных случайных величин (X, Y) имеет вид

$$w_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-R_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-R_{xy}^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2R_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]},$$

где m_x, m_y — математические ожидания X и Y ; σ_x, σ_y — среднеквадратические отклонения; R_{xy} — коэффициент корреляции случайных величин X и Y .

Геометрическое место точек, имеющих равную плотность вероятности, есть эллипс (эллипс рассеивания), определяемый уравнением

$$\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2R_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} = C^2.$$

Если $R_{xy} = 0$, то оси симметрии эллипса рассеивания параллельны координатным осям Ox и Oy , случайные величины X и Y не связаны и независимы, а плотность вероятности $w_2(x, y)$ равна

$$w_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}$$

Одномерные функции распределения и плотности вероятности выражаются через двумерные с помощью следующих соотношений:

$$F_1(x) = F_2(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dx dy,$$

$$W_1(x) = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dy,$$

$$F_1(y) = F_2(\infty, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dx dy,$$

$$W_1(y) = \frac{\partial F_1(y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dx.$$

Закон распределения системы двух случайных величин X, Y определяется распределением каждой из величин, входящих в систему, и зависимостью между ними. Степень зависимости случайных величин X и Y характеризуется условным законом распределения, под которым понимается закон распределения одной из случайных величин, найденный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

По теореме умножения законов распределения

где

$$W_2(x, y) = W_1(x) W_1(y|x) = W_1(y) W_1(x|y),$$

$$W_1(y|x) = \frac{\partial F_1(y|x)}{\partial y}, \quad W_1(x|y) = \frac{\partial F_1(x|y)}{\partial x}$$

— условные плотности вероятностей. Для независимых случайных величин

$$W_2(x, y) = W_1(x) W_1(y)$$

Условие (2.28) — необходимое и достаточное условие независимости случайных величин.

Условные и безусловные плотности вероятностей связаны между собой выражениями

$$\left. \begin{aligned} W_1(y|x) &= \frac{W_2(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dy} = \frac{W_2(x, y)}{W_1(x)}, \\ W_1(x|y) &= \frac{W_2(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dx} = \frac{W_2(x, y)}{W_1(y)}. \end{aligned} \right\}$$

Условные плотности вероятностей обладают всеми свойствами, которые присущи безус-

ловным плотностям.

Формулы полной вероятности и Байеса для непрерывных случайных величин соответственно имеют вид

$$W_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(x) W_1(y|x) dx,$$

$$W_1(x|y) = \frac{W_1(x) W_1(y|x)}{\int_{-\infty}^{\infty} W_1(x) W_1(y|x) dx}.$$

Выражения (2.12) – (2.31) можно обобщить на многомерные (n-мерные) функции распределения $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и плотности вероятности $W_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которые описывают систему η случайных величин (n-мерный случайный вектор) [1].

В табл. 2.1 приведен ряд законов распределения дискретной случайной величины и соответствующие им характеристические функции $\Phi(u)$ (см. § 1, гл. 3), а также графики законов при различных значениях параметров распределений.

§ 2. Примеры

Пример 2.1. По одной и той же стартовой позиции противника производится пуск пяти ракет, причем вероятность p попадания в цель при каждом пуске равна 0,8.

Построить: а) ряд распределения числа попаданий; б) многоугольник распределения; в) функцию распределения $F(x)$ числа попаданий.

Решение. Случайная величина X (число попаданий в цель) может принять следующие значения: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5$. Эти значения случайная величина X принимает с вероятностями $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$, которые равны:

$$p_0 = (1-p)^5 = 0,2^5 = 0,00032,$$

$$p_1 = C_5^1 p (1-p)^4 = 5 \cdot 0,8 \cdot 0,2^4 = 0,0064,$$

$$p_2 = C_5^2 p^2 (1-p)^3 = 10 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3 = 0,0512,$$

$$p_3 = C_5^3 p^3 (1-p)^2 = 10 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 = 0,2048,$$

$$p_4 = C_5^4 p^4 (1-p) = 5 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 = 0,4096,$$

$$p_5 = p^5 = 0,8^5 = 0,32768.$$

Из вычисленных значений $p_i, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, видно, что наиболее вероятно попадание в цель четырьмя ракетами, в то время как промах всеми ракетами маловероятен.

а) Ряд распределения имеет следующий вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,00032	0,00640	0,05120	0,20480	0,40960	0,32768

б) в соответствии с рядом распределения вероятностей числа попаданий в цель построен многоугольник распределения, представленный на рис. 2.5;

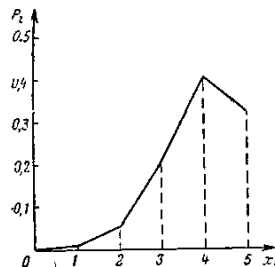


Рис. 2.5. Многоугольник распределения.

в) по определению функция распределения $F_i(x)$ равна

$$F_1(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

При $x < 0$

$$F_1(x) = P(x < 0) = 0,$$

при $0 < x \leq 1$

$$F_1(x) = P(X = x_0 = 0) = 0,00032,$$

при $1 < x \leq 2$

$$F_1(x) = P(X=0) + P(X=1) = 0,00032 + 0,00640 = 0,00672,$$

при $2 < x \leq 3$

$$F_1(x) = \sum_{i=0}^2 P(X = x_i) = 0,00032 + 0,00640 + 0,05120 = 0,05792,$$

при $3 < x \leq 4$

$$F_1(x) = \sum_{i=0}^3 P(X = x_i) = 0,26272,$$

при $4 < x \leq 5$

$$F_1(x) = \sum_{i=0}^4 P(X = x_i) = 0,67232$$

при $x > 5$

$$F_1(x) = \sum_{i=0}^5 P(X = x_i) = \sum_{i=0}^5 p_i = 1.$$

Таким образом, аналитическое выражение функции распределения имеет вид

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 0,00032 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0,00672 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0,05792 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 0,26272 & \text{при } 3 < x \leq 4, \\ 0,67232 & \text{при } 4 < x \leq 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

График функции распределения приведен на рис. 2.6.

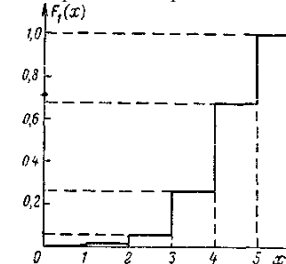


Рис. 2.6. График функции распределения дискретной случайной величины.

Пример 2.2. Плотность вероятности $W_1(X)$ случайной величины X имеет вид

$$W_1(x) = \beta e^{-\lambda |x|}, \quad (-\infty < x < \infty),$$

где β и λ – постоянные величины.

Требуется: а) найти соотношение, которому должны удовлетворять постоянные β и λ ; б) вычислить функцию распределения $F_1(x)$ случайной величины X ; в) построить графики плотности вероятности $w_1(x)$ и функции распределения $F_1(x)$ при $\lambda = 2$.

Решение. а) Чтобы найти соотношение между постоянными β и λ , воспользуемся условием нормировки для плотности вероятности. При этом учтем, что плотность вероятности имеет разные аналитические выражения при $x < 0$ и $x > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_1(x) dx = \beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda |x|} dx = \beta \left[\int_{-\infty}^0 e^{\lambda x} dx + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right] = \frac{2\beta}{\lambda} = 1$$

Следовательно, $\lambda = 2\beta$.

б) Функция распределения $F_1(x)$ по определению равна:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x W_1(z) dz.$$

При $x < 0$

$$F_1(x) = \beta \int_{-\infty}^x e^{\lambda z} dz = \frac{\beta}{\lambda} e^{\lambda x} = \frac{1}{2} e^{\lambda x}.$$

При $x > 0$

$$F_1(x) = \frac{1}{2} + \beta \int_0^x e^{-\lambda z} dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\lambda x} = 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}.$$

в) Когда $\lambda = 2$, то $W_1(x) = e^{-2|x|}$, а

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{2x} & \text{при } x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-2x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Графики $W_1(x)$ и $F_1(x)$ при $\lambda = 2$ соответственно изображены на рис. 2.7.

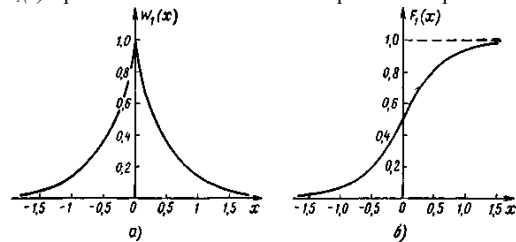


Рис. 2.7. Плотность вероятности (а) и функция распределения (б) непрерывной случайной величины

Пример 2.3. Функция распределения $F_1(x)$ случайной величины X задана графиком (рис. 2.8).

Требуется: а) найти аналитическое выражение для функции распределения; б) построить график плотности вероятности $W_1(x)$; в) определить вероятность P того, что величина X примет значение, заключенное в пределах от 3,5 до 4,5.

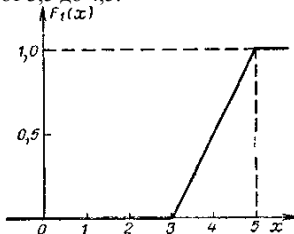


Рис. 2.8. Функция распределения

Решение. а) Когда значения величины X заключены в пределах от 3 до 5, функция распределения $F_1(x)$ представляет собой отрезок прямой, проходящей через две точки с координатами (3, 0) и (5, 1). Используя уравнение прямой в виде $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$,

получим $\frac{x-3}{5-3} = \frac{F_1(x)}{1}$, т.е. $F_1(x) = \frac{x-3}{2}$. Следовательно,

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3, \\ \frac{x-3}{2} & \text{при } 3 < x \leq 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

б) По определению $W_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx}$. Поэтому

$$W_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3, \\ \frac{1}{2} & \text{при } 3 < x \leq 5, \\ 0 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

График плотности вероятности $W_1(x)$ представлен на рис. 2.9.

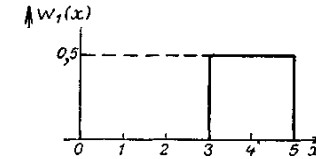


Рис. 2.9. Плотность вероятности.

$$в) P = P(3, 5 \leq X \leq 4, 5) = F_1(4, 5) - F_1(3, 5) = \frac{4, 5 - 3, 5}{2} = 0,5.$$

Пример 2.4. Случайная величина X удовлетворяет неравенству $-1 < X \leq 1$, причем в интервале от -1 до +1 она распределена равномерно, а каждое из значений -1 и +1 принимает с вероятностью 1/4.

Требуется: а) найти и построить функцию распределения $F_1(x)$ случайной величины X ; б) вычислить вероятность P того, что случайная величина попадет в интервал от -1/2 до +1/2

Решение. По условию X - случайная величина смешанного типа.

а) При $x \leq -1$

$$F_1(x) = P(X < x) = 0.$$

При $-1 < x \leq 1$

$$F_1(x) = P(X = -1) + \int_{-1}^x W_1(z) dz = \frac{1}{4} + \int_{-1}^x \frac{dz}{4} = \frac{1}{4} + \frac{x+1}{4} = \frac{x+2}{4}.$$

При $x > 1$

$$F_1(x) = P(X = -1) + \int_{-1}^1 \frac{dz}{4} + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.$$

Следовательно,

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{x+2}{4} & \text{при } -1 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

График функции распределения $F_1(x)$ представлен на рис. 2.10.

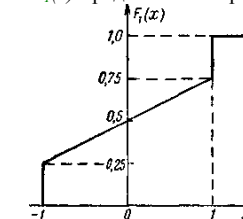


Рис. 2.10. Функция распределения

$$б) P = F_1\left(\frac{1}{2}\right) - F_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2+0,5}{4} - \frac{2-0,5}{4} = \frac{1}{4}.$$

Пример 2.5. Плотность вероятности $w_2(x, y)$ нормального распределения двух случайных величин X и Y выражается формулой

$$w_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-R_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-R_{xy}^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2R_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]},$$

где $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y, R_{xy}$ — параметры распределения

Определить:

а) плотности вероятностей $w(x)$ и $w(y)$ случайных величин X и Y ;

б) условные плотности вероятностей $w(y|x)$ и $w(x|y)$ величин X и Y .

Решение. а) Согласно формуле (2.26) имеем

$$w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x, y) dy = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-R_{xy}^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-R_{xy}^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2R_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]} dy.$$

Произведя замену переменных

$$\frac{x-m_x}{\sqrt{2}\sigma_x} = u, \quad \frac{y-m_y}{\sqrt{2}\sigma_y} = v,$$

получим

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{1-R_{xy}^2}} e^{-\frac{u^2}{1-R_{xy}^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{1-R_{xy}^2}uv + \frac{2R_{xy}u}{1-R_{xy}^2}v} dv.$$

Известно [15], что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2x^2 \pm qx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{p} e^{-\frac{q^2}{4p^2}}.$$

Воспользовавшись этим интегралом, найдем

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-u^2}$$

или

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Таким образом, величина X подчинена нормальному закону с параметрами m_x и σ_x .

Произведя аналогичные вычисления, получим

$$w(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}.$$

б) По формулам (2.29) находим условные плотности вероятности

$$w(y|x) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}\sqrt{1-R_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-R_{xy}^2)}\left[\frac{y-m_y-R_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x)}{\sigma_y}\right]^2},$$

$$w(x|y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}\sqrt{1-R_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-R_{xy}^2)}\left[\frac{x-m_x-R_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y)}{\sigma_x}\right]^2}.$$

Из этих выражений следует, что $w(y|x)$ и $w(x|y)$ представляют собой нормальные плотности вероятности с параметрами:

$$m_{y|x} = m_y + R_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x),$$

$$\sigma_{y|x} = \sigma_y\sqrt{1-R_{xy}^2},$$

$$m_{x|y} = m_x + R_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y),$$

$$\sigma_{x|y} = \sigma_x\sqrt{1-R_{xy}^2}.$$

§ 3. Задачи и ответы

2.1. Привести примеры случайных величин дискретного, непрерывного и смешанного типов.

2.2. Какие размерности имеют функция распределения $F_I(x)$ и плотность вероятности

$w_I(x)$?

2.3. Симметричная игральная кость брошена 3 раза. Найти ряд распределения числа появлений цифры 4.

Ответ:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

2.4. По двоичному каналу связи с помехами передаются две цифры: единица и ноль. Априорные вероятности передачи этих цифр равны $p(I) = p(0) = 1/2$. Из-за помех возможны искажения. Вероятности перехода единицы в единицу и нуля в ноль соответственно равны $p(I|I) = p, p(0|0) = q$.

Определить закон распределения вероятностей случайной величины X — одноразрядного числа, которое будет получено на приемном конце в некоторый момент времени.

Ответ:

x_i	0	1
p_i	$\frac{1}{2}(1-p+q)$	$\frac{1}{2}(1-q+p)$

2.5. Вероятность отыскания малоразмерного объекта в заданном районе в каждом вылете равна p .

Найти ряд распределения числа произведенных независимых вылетов, которые выполняются до первого обнаружения объекта.

Ответ:

x_i	1	2	3	...	i	...
p_i	p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$...	$p(1-p)^{i-1}$...

2.6. Производятся последовательные испытания k приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным.

Построить ряд распределения случайной величины X (числа испытанных приборов), если вероятность выдержать испытания для каждого из них равна p .

Ответ:

x_i	1	2	3	...	i	...	k
p_i	$(1-p)$	$p(1-p)$	$p^2(1-p)$...	$p^{i-1}(1-p)$...	$p^{k-1}(1-p)$

2.7. Два стрелка стреляют поочередно по мишени, причем стрельба ведется до первого попадания.

Определить закон распределения вероятностей случайной величины X — числа произведенных выстрелов, если известно, что при одном выстреле вероятность попадания первого стрелка равна p_1 , а второго стрелка — p_2 .

Ответ:

$$P(X=2k+1) = p_1(1-p_1)^k(1-p_2)^k,$$

$$P(X=2k+2) = p_2(1-p_1)^{k+1}(1-p_2)^k,$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

2.8. Из 25 приборов, среди которых 10 бракованных, случайным образом выбраны 5 для проверки их параметров. Определить и построить: а) ряд распределения случайного числа X бракованных приборов в выборке; б) функцию распределения $F_I(x)$ случайной величины X .

Ответ: а)

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,0565	0,257	0,386	0,237	0,0593	0,00475

$$б) F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 0,0565 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0,314 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0,700 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 0,937 & \text{при } 3 < x \leq 4, \\ 0,996 & \text{при } 4 < x \leq 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

2.9. Производится 5 выстрелов по мишени; вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4.

Определить и построить: а) ряд распределения случайной величины X – числа попаданий в мишень; б) функцию распределения $F_1(x)$ случайной величины X .

Ответ: а)

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,07776	0,25920	0,34560	0,23040	0,07680	0,01024

$$б) F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 0,07776 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0,33696 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0,68256 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 0,91296 & \text{при } 3 < x \leq 4, \\ 0,98976 & \text{при } 4 < x \leq 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

2.10. Пуск ракет по одной и той же стартовой позиции противника производится до тех пор, пока не произойдет двух попаданий в цель. Вероятность p попадания в цель одной ракетой равна 0,5.

Определить закон распределения числа X произведенных пусков ракет.

Ответ:

$$P(k) = P(X=k) = (k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

где $k = 2, 3, 4, \dots$

2.11. Вероятность получения отметки от цели на экране обзорного радиолокатора при одном обороте антенны равна p . Цель считается обнаруженной, если от нее получено n отметок.

Найти закон распределения случайной величины X – числа оборотов антенны радиолокатора.

Ответ:

$$P(k) = P(X=k) = C_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{k-n},$$

где $k = n, n+1, n+2, \dots$

2.12. Прибор, состоящий из блоков a , b_1 и b_2 , дает отказ, если происходит событие $C=A+B_1B_2$, где A – отказ блока a ; B_1 и B_2 – соответственно отказы блоков b_1 и b_2 . Отказы происходят при попадании в блок хотя бы одной космической частицы.

Определить закон распределения числа случайных частиц X , попадание которых в прибор приводит к его отказу, если вероятности попадания в блоки частицы, попавшей в прибор, равны $P(A)=0,5$, $P(B_1)=P(B_2)=0,25$.

Ответ:

$$P(X=m)=1-2 \cdot 0,25^m \quad \text{для всех } m \geq 1.$$

2.13. Стрельба по подвижной цели ведется до получения первого попадания. Вероятность попадания от выстрела к выстрелу не меняется и равна 0,6. На стрельбу отпущено 4 снаряда.

Вычислить: а) ряд распределения случайной величины X расхода снарядов; б) функцию распределения случайной величины X .

Ответ: а)

x_i	1	2	3	4
p_i	0,6	0,24	0,096	0,064

$$б) F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ 0,6 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0,84 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 0,936 & \text{при } 3 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

2.14. Ряд распределения вероятностей случайной величины X имеет вид

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
p_i	0,05	0,15	0,2	0,2	0,25	0,1	0,05

Найти: а) функцию распределения $F_1(x)$ случайной величины X и построить ее график; б) вероятность того, что величина X примет значение, не превосходящее по абсолютной величине 1.

Ответ:

$$а) F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -3, \\ 0,05 & \text{при } -3 < x \leq -2, \\ 0,20 & \text{при } -2 < x \leq -1, \\ 0,40 & \text{при } -1 < x \leq 0, \\ 0,60 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0,85 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0,95 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3; \end{cases}$$

$$б) P(X \leq 1) = P(-1 \leq X \leq 1) = 0,65.$$

2.15. Последовательные ускоренные испытания приборов на надежность производятся до первого отказа, после чего они прекращаются.

Пользуясь понятием плотности вероятности для дискретной случайной величины, найти плотность вероятности $W_1(x)$ случайной величины X – числа испытанных приборов, если вероятность отказа для всех приборов одна и та же и равна 0,5.

Ответ [18]:

$$W_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \delta(x-x_i).$$

2.16. Функция распределения $F_1(x)$ случайной величины X задана графиком (рис. 2.13, а).

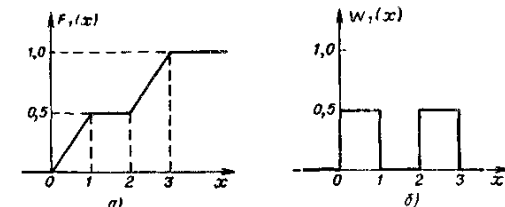


Рис. 2.13. Функция распределения (а) и плотность вероятности (б).

Требуется: а) найти аналитическое выражение для $F_1(x)$; б) построить график плотности вероятности $W_1(x)$; в) определить вероятность того, что величина X примет значение, заключенное в пределах от 0,2 до 0,8.

Ответ:

$$a) F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x}{2} & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{2} & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ \frac{x-1}{2} & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3; \end{cases}$$

б) график $W_1(x)$ приведен на рис. 2.13, б;

в) 0,3.

2.17. Плотность вероятности $W_1(x)$ случайной величины X графически изображена на рис. 2.14 (закон Симпсона).

Найти: а) аналитические выражения плотности вероятности $W_1(x)$ и функции распределения $F_1(x)$; б) вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в пределах от $-0,5$ до $+0,5$.

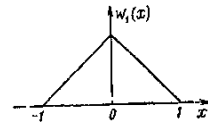


Рис. 2.14. Закон Симпсона.

Ответ:

$$a) W_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ x+1 & \text{при } -1 < x \leq 0, \\ 1-x & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1; \end{cases}$$

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{(x+1)^2}{2} & \text{при } -1 < x \leq 0, \\ 1 - \frac{(1-x)^2}{2} & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1; \end{cases}$$

б) $\frac{3}{4}$.

2.18. График плотности вероятности $W_1(x)$ непрерывной случайной величины X показан на рис. 2.15.

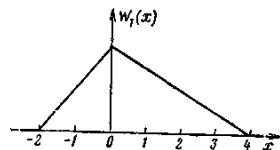


Рис. 2.15. Плотность вероятности.

Найти аналитические выражения плотности вероятности $W_1(x)$ и функции распределения $F_1(x)$ величины X .

Ответ:

$$W_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{x+2}{6} & \text{при } -2 < x \leq 0, \\ \frac{4-x}{12} & \text{при } 0 < x \leq 4, \\ 0 & \text{при } x > 4; \end{cases}$$

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{x^2+4x+4}{12} & \text{при } -2 < x \leq 0, \\ \frac{8x-x^2}{24} & \text{при } 0 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

2.19. Случайная величина X подчинена закону Пуассона с параметром распределения $\lambda=2$.

Требуется: а) построить ряд и функцию распределения $F_1(x)$ величины X ; б) определить вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в пределах от 2 до 4.

Ответ: а)

x_i	0	1	2	3	4	5	...	i	...
p_i	0,135	0,271	0,271	0,180	0,0902	0,0361	...	$\frac{2^i}{i!} e^{-2}$...

б) 0,5412.

2.20. Случайная величина X подчинена закону Пуассона с параметром λ :

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Доказать справедливость следующих соотношений:

$$P_n(k \geq 1) = 1 - e^{-\lambda}; \quad P_n(k > 1) = 1 - (1 + \lambda) e^{-\lambda}.$$

2.21. При фиксированном положении точки разрыва снаряда в уязвимый агрегат цели попадает случайное число осколков X , распределенное по закону Пуассона с параметром $\lambda = 4$. Каждый осколок, попавший в агрегат, поражает его (независимо от других) с вероятностью 0,3 и не поражает с вероятностью 0,7.

Определить вероятность того, что агрегат будет поражен.

Ответ: 0,699.

2.22. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m_x=3, \sigma_x=2$. Как изменится плотность вероятности $w(x)$, если параметры примут значения $m_x=-3, \sigma_x=4$?

2.23. Случайная величина X подчинена нормальному закону с параметрами $m_x=-2$ и $\sigma_x=4$.

Требуется: а) написать выражения для плотности вероятности $w(x)$ и функции распределения $F_1(x)$ величины X и построить их графики; б) определить вероятность неравенства $-1 \leq X < 1$.

Ответ:

$$a) w(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+2)^2}{32}}, \quad F_1(x) = \int_{-\infty}^x w(z) dz = \Phi\left(\frac{x+2}{4}\right),$$

где $\Phi(z)$ — интеграл вероятности (2.9).

б) 0,175.

2.24. Сообщение передается последовательностью амплитудно-модулированных импульсов с заданным шагом квантования Δ (Δ — наименьшая разность между двумя импульсами). На сообщение накладываются шумы, распределенные по нормальному закону с плотностью вероятности

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Если мгновенное значение шумов превышает половину шага квантования Δ , то при передаче сообщения возникает ошибка.

Определить, при каком минимально допустимом шаге квантования вероятность ошибки из-за шумов не превысит 0,1.

Ответ: $\Delta = 3,4\sigma$.

2.25. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами распределения σ_x и $m_x = 0$.

Определить вероятности P_1, P_2, P_3 того, что величина X примет значение, не превосходящее по абсолютной величине $\sigma_x, 2\sigma_x, 3\sigma_x$.

Ответ: $P_1 \approx 0,683$; $P_2 \approx 0,955$; $P_3 \approx 0,997$.

2.26. Стрельба ведется из точки O вдоль прямой Ox . Средняя дальность полета снаряда равна 120 км.

Предполагая, что дальность полета X есть нормально распределенная случайная величина со средним квадратичным отклонением 3 км, найти, какой процент выпускаемых снарядов даст перелет от 6 до 9 км.

Ответ: 2,14%.

2.27. При массовом изготовлении некоторой детали установлено, что ее длина X распределена нормально с параметрами $m_x = 25$ см и $\sigma_x = 0,2$ см.

Какую точность длины детали можно гарантировать с вероятностью 0,95?

Ответ: С вероятностью 0,95 можно гарантировать, что отклонение длины детали от среднего значения не превышает $\Delta l = 0,392$ см.

2.28. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и вероятным отклонением E .

Определить вероятность того, что $|X - m| < 4E$.

Ответ: 0,993.

2.29. Возможный результат измерения длительности τ видеопульса подчиняется нормальному закону распределения. Вероятное отклонение E метода измерения равно 0,001 сек.

Как следует выбрать число e , чтобы с вероятностью 0,997 имело место неравенство $|\tau - \tau_0| < e$, где τ_0 – истинное значение длительности видеопульса?

Ответ: $e = 0,0044$ сек.

2.30. Расстояние до объекта измеряют с помощью метода, вероятная ошибка которого равна 30 м. Предполагается, что возможный результат измерения распределен по нормальному закону.

Найти вероятность того, что измеренное значение расстояния уклоняется от истинного не более чем на: а) 16 м; б) 30 м; в) 60 м.

Ответ: а) 0,264; б) 0,500; в) 0,823.

2.31. Случайная величина X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $m_x = 0$.

Определить, каким должно быть среднее квадратичное значение σ_x , чтобы вероятность попадания величины X на участок (α, β) была наибольшей, если $0 < \alpha < \beta$.

Ответ:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2(\ln \beta - \ln \alpha)}}.$$

2.32. Случайная величина X – ошибка измерительного прибора, распределена по нормальному закону с дисперсией 16 мВ^2 . Систематическая ошибка прибора отсутствует.

Найти вероятность того, что в пяти независимых измерениях ошибка X : а) превысит по модулю 6 мВ не более трех раз; б) хотя бы один раз окажется в интервале $0,5 - 3,5 \text{ мВ}$.

Ответ: а) 0,999; б) 0,776.

2.33. В круг радиуса R наудачу бросили точку. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области.

Найти функцию распределения $F_1(x)$ и плотность вероятности $W_1(x)$ расстояния X точки до центра круга.

Ответ:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{R^2} & \text{при } 0 < x \leq R, \\ 1 & \text{при } x > R; \end{cases}$$

$$W_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{2x}{R^2} & \text{при } 0 < x \leq R, \\ 0 & \text{при } x > R. \end{cases}$$

2.34. На отрезок AB длиной l наугад бросают точку M . Вероятность попадания этой точки в любой отрезок, лежащий целиком внутри AB , зависит только от длины этого отрезка и пропорциональна ему.

Определить: а) функцию распределения $F_1(x)$ и плотность вероятности $W_1(x)$ площади прямоугольника со сторонами AM и MB ; б) вероятность P того, что площадь прямоугольника будет меньше $3l^2/16$.

Ответ:

$$\text{а) } F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{4x}{l^2}} & \text{при } 0 < x \leq \frac{l^2}{4}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{l^2}{4}; \end{cases}$$

$$W_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{2}{l^2 \sqrt{1 - \frac{4x}{l^2}}} & \text{при } 0 < x \leq \frac{l^2}{4}, \\ 0 & \text{при } x > \frac{l^2}{4}; \end{cases}$$

б) $P = P\left(X < \frac{3}{16} l^2\right) = \frac{1}{2}.$

2.35. На окружности радиусом R и с центром, расположенным в начале координат, берется наудачу точка. Вероятность взять точку на любой дуге окружности зависит только от длины этой дуги и пропорциональна ей.

Вычислить: а) функцию распределения $F_1(x)$ и плотность вероятности $W_1(x)$ положения проекции X точки на ось абсцисс; б) вероятность неравенства $-R/2 < X < R/2$.

Ответ:

$$\text{а) } F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -R, \\ 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{x}{R} & \text{при } -R < x \leq R, \\ 1 & \text{при } x > R; \end{cases}$$

$$W_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -R, \\ \frac{1}{\pi \sqrt{R^2 - x^2}} & \text{при } -R < x \leq R, \\ 0 & \text{при } x > R; \end{cases}$$

б) $\frac{1}{3}.$

2.36. Функция распределения $F_1(x)$ непрерывной случайной величины X задана выражением

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ ax^2 & \text{при } 0 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Определить: а) коэффициент a ; б) плотность вероятности $W_1(x)$; в) вероятность попадания величины X на участок от 1,5 до 3,5.

Ответ:

а) $a = 1/16$;

$$б) W_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{8}x & \text{при } 0 < x \leq 4, \\ 0 & \text{при } x > 4; \end{cases}$$

в) 5/8.

2.37. Случайная величина X подчинена закону Коши с плотностью вероятности

$$W_1(x) = \frac{c}{h^2 + x^2}.$$

Требуется: а) найти соотношение, которому должны удовлетворять постоянные c и h ; б) определить функцию распределения $F_1(x)$ случайной величины X ; в) построить графики $W_1(x)$ и $F_1(x)$ для случая, когда $A=1$; г) вычислить вероятность неравенства $-1 < X \leq 1$ при $h=1$.

Ответ:

$$а) c = \frac{h}{\pi}, \quad W_1(x) = \frac{h}{\pi(h^2 + x^2)};$$

$$б) F_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{h};$$

$$г) \frac{1}{2}.$$

2.38. На электронное реле воздействует случайное напряжение X с релеевской плотностью вероятности

$$W_1(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0.$$

Определить вероятность P срабатывания схемы, если электронное реле срабатывает всякий раз, когда напряжение на его входе превышает $2B$.

Ответ:

$$P = e^{-\frac{2}{\sigma^2}}.$$

2.39. При определенных условиях замирания радиосигнала из-за явления многолучевости можно моделировать распределением Релея

$$W_1(A) = \frac{2A}{A_0^2} e^{-\frac{A^2}{A_0^2}}, \quad A > 0,$$

где A – подверженные замираниям мгновенные значения амплитуды огибающей принимаемого сигнала; A_0 – квадрат усредненной за достаточно большое время амплитуды огибающей.

Пусть федингующий сигнал принимается на n антенн, разнесенных друг относительно друга на такие расстояния, при которых складываемые сигналы можно рассматривать статистически независимыми.

Вычислить вероятность P того, что сигнал на всех антеннах одновременно упадет ниже уровня H .

Ответ:

$$P = \left(1 - e^{-\frac{H^2}{A_0^2}}\right)^n.$$

2.40. Функция $W_1(x)$ задана выражением

$$W_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{A}{x^4} & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Определить: а) при каком значении A эта функция будет плотностью вероятности случайной величины X ; б) вероятность P_1 того, что величина X примет значения в интервале от 1 до 2; в) вероятность P_2 того, что при 3-х независимых испытаниях случайная величина X ни разу не попадет в интервал от 1 до 2.

Ответ:

а) $A = 3$;

б) $P_1 = 7/8$;

в) $P_2 = (1/8)^3$.

2.41. Бомбардировщик может быть атакован истребителем под различными курсовыми углами; случайная величина X – курсовой угол – распределена по закону, плотность вероятности $W_1(x)$ которого имеет вид

$$W_1(x) = \begin{cases} A_0 \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A_0 и функцию распределения $F_1(x)$ курсового угла; б) вероятность того, что атакующий истребитель может быть обстрелян, если на бомбардировщике имеется стрелковая установка, позволяющая обстреливать атакующий истребитель, только когда курсовой угол находится в пределах от $-\pi/3$ до $+\pi/3$.

Ответ:

а) $A_0 = 1/2$;

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1) & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

б) 0,866.

2.42. Плотность вероятности $W_1(x)$ случайной величины X имеет вид

$$W_1(x) = \frac{c}{e^x + e^{-x}}.$$

Вычислить: а) постоянную c ; б) вероятность P того, что в двух независимых наблюдениях случайная величина X примет значения, меньшие 1.

Ответ:

а) $c = 2/\pi$;

б) $P = [(2/\pi) \operatorname{arctg}(e)]^2$.

2.43. Испытания показали, что срок службы X элементов радиоэлектронного оборудования можно описать функцией распределения Вейбулла

$$F_1(x) = 1 - e^{-cx^2}, \quad \alpha > 0, \quad c > 0, \quad x > 0.$$

Определить плотность вероятности $W_1(x)$ случайной величины X .

Ответ:

$$W_1(x) = c\alpha x^{\alpha-1} e^{-cx^2}.$$

2.44. Функция распределения $F_1(t)$ случайного времени безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид

$$F_1(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \quad t > 0.$$

Определить: а) плотность вероятности $W_1(t)$; б) вероятность безотказной работы аппаратуры в течение времени T .

Ответ:

$$а) W_1(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}};$$

$$б) P = e^{-1} \approx 0,368.$$

2.45. Напряжения сигнала $u_a(t)$ и гармонической помехи $u_n(t)$ имеют вид

$$u_s(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \\ u_n(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0 + \varphi),$$

где φ – случайная разность фаз колебаний сигнала и помехи, равномерно распределенная в интервале от $-\pi$ до π .

Определить вероятность того, что амплитуда суммарного колебания меньше половины амплитуды сигнала.

Ответ: 0,16.

2.46. Группа самолетов проводит одиночное и независимое бомбометание по железнодорожному мосту, ширина которого равна 10 м. Направление захода – вдоль моста. Прицеливание – по средней линии моста. Вероятное отклонение E при нормальном рассеивании в направлении, перпендикулярном полету, равно 25 м. Систематические ошибки отсутствуют. Каждый самолет сбрасывает одну бомбу. Для разрушения моста достаточно одного попадания.

Сколько следует послать самолетов, чтобы с вероятностью не менее 0,9 быть уверенным в

разрушении моста?

Ответ: $n > 21$.

2.47. Самолет проводит одиночное бомбометание по колонне войск противника, ширина которой 8 м. Направление полета – вдоль колонны, прицеливание – по средней линии. Вероятное отклонение при нормальном рассеивании в направлении, перпендикулярном полету, равно 10 м. Вследствие скольжения стреляющего самолета имеется систематическая ошибка – центр рассеивания смещается в направлении, перпендикулярном полету, в среднем на 10 м.

Найти вероятность попадания в колонну,

Ответ: 0,171.

2.48. Проводится стрельба ракетами по взлетно-посадочной полосе, ширина которой 100 м, длина практически не ограничена. Прицеливание ведется по средней линии полосы, но из-за наличия ветра средняя точка попадания смещается: вдоль полосы на 200 м и поперек на 50 м. Вероятное отклонение E , характеризующее нормальное рассеивание точки попадания в направлении, перпендикулярном полосе, равно 100 м.

Найти вероятность того, что из трех выстрелов ракетами хотя бы один даст попадание во взлетно-посадочную полосу.

Ответ: 0,578.

2.49. Доказать, что для независимых случайных величин X и Y справедливо равенство

$$F_2(x, y) = F_1(x) F_1(y).$$

2.50. По цели проводятся два независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна p_1 при втором – p_2 .

Найти функцию распределения $F_2(x, y)$ системы случайных величин (X, Y) , где X – число попаданий при первом выстреле, а Y – число попаданий при втором выстреле.

Ответ:

$$F_2(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, y \leq 0, \\ (1-p_1)(1-p_2) & \text{при } 0 < x < 1, 0 < y \leq 1, \\ 1-p_1 & \text{при } 0 < x \leq 1, y > 1, \\ 1-p_2 & \text{при } x > 1, 0 < y < 1, \\ 1 & \text{при } x > 1, y > 1. \end{cases}$$

2.51. Система независимых случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) задана плотностями вероятностей $W_1(x_1), W_2(x_2), \dots, W_n(x_n)$.

Вычислить функцию распределения $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ этой системы случайных величин.

Ответ:

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{x_i} W_1(y_i) dy_i.$$

2.52. Независимые случайные величины X и Y распределены по нормальному закону с параметрами $m_x=1, m_y=-3, \sigma_x^2=9, \sigma_y^2=16$.

Записать выражение для плотности вероятности $W_2(x, y)$ системы случайных величин (X, Y) .

Ответ:

$$w_2(x, y) = \frac{1}{24\pi} e^{-\frac{(x-1)^2}{18} - \frac{(y+3)^2}{32}}.$$

2.53. Плотность вероятности $w_2(x, y)$ нормального распределения системы двух случайных величин (X, Y) имеет вид

$$w_2(x, y) = \frac{1}{70\pi} e^{-\frac{(x+3)^2}{50} - \frac{(y-5)^2}{98}}.$$

Найти параметры распределения $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y$.

Ответ: $m_x = -3, m_y = 5, \sigma_x = 5, \sigma_y = 7$.

2.54. Независимые случайные величины X и Y имеют равномерные распределения соответственно в интервалах от 0 до 1 и от -1 до 1.

Определить функцию распределения $F_2(x, y)$ системы случайных величин (X, Y) .

Ответ:

$$F_2(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, y \leq -1, \\ \frac{x(y+1)}{2} & \text{при } 0 < x \leq 1, -1 < y \leq 1, \\ x & \text{при } 0 < x < 1, y > 1, \\ \frac{y+1}{2} & \text{при } x > 1, -1 < y \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1, y > 1. \end{cases}$$

2.55. Плотность вероятности $W_2(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) имеет вид

$$W_2(x, y) = \frac{A}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$$

Найти: а) коэффициент A ; б) вероятность P попадания величины (X, Y) в квадрат $-l < x \leq l; 0 < y \leq 1$; в) функции распределения $F_2(x, y), F_1(x), F_1(y)$; г) плотности вероятностей $W_1(x)$ и $W_1(y)$ и зависят ли случайные величины X и Y друг от друга.

Ответ:

$$\text{а) } A = \frac{1}{\pi^2};$$

$$\text{б) } P = 0,125;$$

$$\text{в) } F_2(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \left(\arctg x + \frac{\pi}{2} \right) \left(\arctg y + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$F_1(x) = \frac{1}{\pi} \left(\arctg x + \frac{\pi}{2} \right), \quad F_1(y) = \frac{1}{\pi} \left(\arctg y + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\text{г) } W_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad W_1(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

Случайные величины X и Y независимы.

2.56. Функция распределения $F_2(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) задана выражением

$$F_2(x, y) = 1 - e^{-\alpha x} - e^{-\beta y} + e^{-\alpha x - \beta y}, \quad x > 0, y > 0.$$

Определить: а) плотность вероятности $W_2(x, y)$ системы (X, Y) , б) плотности вероятностей $W_1(x)$ и $W_1(y)$ и зависимость случайных величин X и Y ; в) вероятность попадания величины (X, Y) в квадрат с вершинами: $A(l, l), S(0, 1), C(0, 0), D(l, 0)$.

Ответ:

$$\text{а) } W_2(x, y) = \alpha\beta e^{-\alpha x - \beta y};$$

$$\text{б) } W_1(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \quad W_1(y) = \beta e^{-\beta y}.$$

Случайные величины X и Y независимы;

$$\text{в) } P = (1 - e^{-\alpha})(1 - e^{-\beta}).$$

2.57. Плотность вероятности $W_2(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) задана выражением

$$W_2(x, y) = \frac{A}{\pi} e^{-x^2 + 6x - y^2 - 2y - 12}.$$

Определить: а) коэффициент A ; б) плотности вероятностей $W_1(x)$ и $W_1(y)$ соответственно величин X и Y , в) являются ли случайные величины X и Y зависимыми.

Ответ:

$$\text{а) } A = e^2;$$

$$\text{б) } W_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-3)^2}, \quad W_1(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y+1)^2};$$

в) случайные величины X и Y независимы.

3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 1. Теоретические сведения

Во многих практических задачах трудно или даже невозможно полностью определить функцию распределения случайной величины. Иногда в ней и нет необходимости. В таких случаях полное описание случайной величины при помощи закона распределения может быть заменено более грубым, но зато и более простым указанием отдельных параметров (числовых характеристик) этого распределения.

Наиболее важными числовыми характеристиками случайной величины X являются математическое ожидание (среднее значение) m_x и дисперсия σ_x^2 . Вместо m_x используют обозначения $M(X)$, $E(X)$, а вместо σ^2 - $D(X)$.

Для дискретной случайной величины X математическое ожидание равно

$$m_x = M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (3.1)$$

Если X - непрерывная случайная величина с плотностью вероятности $W_1(x)$, то

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x W_1(x) dx. \quad (3.2)$$

Формулы для дисперсии имеют вид

$$\sigma_x^2 = M[(X - m_x)^2] = M(\dot{X}^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i, \quad (3.3)$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 W_1(x) dx, \quad (3.4)$$

где $\dot{X} = X - m_x$ - центрированная случайная величина, т. е. отклонение случайной величины X от ее математического ожидания.

Обобщением формул (3.1) - (3.4) являются выражения, определяющие математическое ожидание и дисперсию произвольной функции $\varphi(X)$ случайной величины X :

$$M[\varphi(X)] = \sum_i \varphi(x_i) p_i, \quad (3.5)$$

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) W_1(x) dx, \quad (3.6)$$

$$D[\varphi(X)] = \sum_i [\varphi(x_i) - m_\varphi]^2 p_i, \quad (3.7)$$

$$D[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - m_\varphi]^2 W_1(x) dx, \quad (3.8)$$

где $m_\varphi = M[\varphi(X)]$ - математическое ожидание функции $\varphi(X)$. Математическое ожидание определяет абсциссу центра тяжести кривой распределения, а дисперсия - разброс случайной величины относительно ее математического ожидания. Рассеивание случайной величины часто характеризуют средним квадратичным отклонением («стандартом») σ_x , которое равно

$$\sigma_x = + \sqrt{\sigma_x^2}.$$

Кроме математического ожидания в качестве характеристик положения случайной величины применяются иногда медиана и мода.

Медианой Me (иначе, средним или вероятным значением) называется такое значение случайной величины X , при котором

$$P(X < Me) = P(X > Me) = \frac{1}{2}. \quad (3.10)$$

Для непрерывной случайной величины X медиана находится из условия $F_1(Me) = 1/2$ или

$$\int_{-\infty}^{Me} W_1(x) dx = \int_{Me}^{\infty} W_1(x) dx.$$

Для дискретных случайных величин медиана определяется неоднозначно и практически не используется.

Модой M (иначе, наивероятнейшим значением) называется такое значение случайной величины X , для которого вероятность $P(X = M)$ или плотность вероятности $W_1(M)$ имеют наибольшее значение. Если максимум один, то распределение называется **одномодальным** (уни-

дальным), а если несколько - **многомодальным** (полимодальным, мультимодальным).

При описании непрерывного распределения используют иногда квантили. Квантилем, отвечающим заданному уровню вероятности p , называется такое значение $x = x_p$, при котором функция распределения $F_1(x)$ принимает значение, равное p :

$$F_1(x_p) = p \quad (3.11)$$

Общими числовыми характеристиками случайной величины являются моменты, которые представляют собой неслучайные величины (числа), характеризующие случайную величину с какой-либо стороны. Характерная особенность их состоит в том, что моменты более низкого порядка несут в себе больше сведений о случайной величине, чем моменты более высокого порядка.

Моментом k -го порядка случайной величины X относительно произвольной точки a называется математическое ожидание величины $(X - a)^k$:

$$m_k(a) = M(X - a)^k. \quad (3.12)$$

Момент, рассматриваемый относительно начала координат ($a = 0$), называется начальным, а относительно математического ожидания ($a = m_x$) - центральным.

В некоторых случаях используются абсолютные и факториальные моменты, которые соответственно определяются формулами:

$$\beta_k(a) = M(|X - a|^k), \quad (3.13)$$

$$m_{[k]}(a) = M\{|X - a|^{[k]}\}, \quad (3.14)$$

где $z^{[k]} = z(z-1)(z-2)\dots(z-k+1)$.

Факториальные моменты полезны в двух отношениях. С их помощью можно в более компактном виде записать моменты некоторых дискретных распределений (типа биномиального) и, кроме того, в задачах определенного класса, включающих дискретные случайные величины, часто удобно находить начальные моменты m_k , предварительно вычислив факториальные.

Математическое ожидание (среднее значение), определяемое формулами (3.1) и (3.2), представляет собой начальный момент первого порядка. Для любой случайной величины центральный момент первого порядка равен нулю, а центральный момент второго порядка представляет собой дисперсию. Абсолютные моменты четных порядков совпадают с обычными моментами.

При решении практических задач наиболее часто используются начальный момент первого порядка m_1 (математическое ожидание), начальный момент второго порядка m_2 (средний квадрат случайной величины), центральный момент второго порядка μ_2 (дисперсия), центральные моменты третьего и четвертого порядков, а также абсолютный центральный момент V_1 первого порядка, называемый средним арифметическим отклонением.

С центральным моментом третьего порядка μ_3 связан коэффициент асимметрии γ_1 , характеризующий «скошенность» распределения, а с центральным моментом четвертого порядка μ_4 - коэффициент эксцесса γ_2 , показывающий «крутость» распределения вероятностей.

Для симметричных относительно математического ожидания распределений все моменты нечетного порядка (если они существуют) равны нулю и асимметрия отсутствует. Эксцесс нормального распределения равен нулю. Если кривая плотности вероятности $W_1(x)$ имеет более острую и высокую вершину по сравнению с нормальным распределением $w(x)$, то эксцесс положительный; если более низкую и пологую - отрицательный.

Коэффициенты асимметрии и эксцесса определяются соответственно формулами

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad (3.15)$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (3.16)$$

Характеристическая функция $\theta_1(u)$ определяется как математическое ожидание случайной величины e^{jux} , т. е.

$$\theta_1(u) = M(e^{jux}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} W_1(x) dx, \quad (3.27)$$

где u - вещественная величина; $j = \sqrt{-1}$.

Используя представление плотности вероятности $W_1(x)$ в виде суммы дельта-функций, формулу (3.27) можно распространить на дискретные случайные величины

$$\Theta_1(u) = \sum_{k=1}^n p_k e^{iux_k}, \quad (3.28)$$

где x_k - возможные значения случайной величины X ; $p_k = P(X=x_k)$ - соответствующие им вероятности.

Плотность вероятности $W_1(x)$ однозначно выражается через характеристическую функцию:

$$W_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_1(u) e^{-iux} du. \quad (3.29)$$

Из (3.27) видно, что характеристическая функция и плотность вероятности связаны между собой через преобразование. Поэтому для нахождения $\Theta_1(u)$ по известной плотности $W_1(x)$, или $W_1(x)$ по $\Theta_1(u)$ можно пользоваться таблицами преобразований Фурье (или Лапласа с учетом пределов интегрирования).

Для определения моментов m_k случайной величины X нужно вычислить k -ю производную от характеристической функции по параметру u и положить $u=0$:

$$m_k = \frac{1}{i^k} \left. \frac{d^k \Theta_1(u)}{du^k} \right|_{u=0}. \quad (3.30)$$

При исследованиях, связанных с совместным изучением нескольких случайных величин, кроме моментов каждой из них в отдельности, пользуются смешанными моментами случайных величин. Так, например, в случае системы двух случайных величин (X, Y) начальный момент $(k_1 + k_2)$ -го порядка определяется как математическое ожидание величины $X^{k_1} Y^{k_2}$:

$$m_{k_1, k_2} = M(X^{k_1} Y^{k_2}). \quad (3.33)$$

При $k_1=0$ или $k_2=0$ формула (3.33) дает моменты случайных величин X и Y в отдельности.

В табл. 3.2 приведены формулы для определения различных моментов двумерных случайных величин дискретного и непрерывного типов.

Среди смешанных моментов случайных величин особую роль играет центральный смешанный момент второго порядка μ_{11} , который обычно называется корреляционным моментом (иначе «моментом связи», ковариацией) случайных величин X, Y и обозначается символом K_{xy} .

$$\mu_{11} = K_{xy} = M(\dot{X} \dot{Y}) = M[(X - m_x)(Y - m_y)]. \quad (3.34)$$

Для дискретных случайных величин

$$K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij}, \quad (3.35)$$

где $p_{ij} = P(X=x, Y=y)$, а для непрерывных

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) W_2(x, y) dx dy. \quad (3.36)$$

Корреляционный момент K_{xy} представляет собой такую характеристику системы случайных величин, которая описывает, помимо рассеивания величин X и Y , еще и связь между ними. Часто вместо корреляционного момента K_{xy} пользуются безразмерной величиной, называемой коэффициентом корреляции R_{xy} :

$$R_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (3.37)$$

Коэффициент корреляции R_{xy} удовлетворяет условию

$$-1 \leq R_{xy} \leq 1 \quad (3.38)$$

и определяет линейную вероятностную зависимость между случайными величинами.

Если X и Y независимы, то $K_{xy} = 0$ и $R_{xy} = 0$. Две случайные величины, для которых коэффициент корреляции равен нулю, называются некоррелированными. Независимые величины всегда не коррелированы. Зависимые величины могут быть как коррелированными, так и некоррелированными. Для нормальных случайных величин некоррелированность означает также и независимость.

В некоторых случаях используются условные моменты случайной величины X относительно Y . Для условных математического ожидания и дисперсии случайной величины X относительно Y формулы соответственно имеют вид

$$M(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x W_1(x|y) dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x W_2(x, y) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dx}, \quad (3.39)$$

$$D(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X|y)]^2 W_1(x|y) dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X|y)]^2 W_2(x, y) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dx}. \quad (3.40)$$

При решении задач настоящей главы следует иметь в виду известные соотношения для основных числовых характеристик случайных величин:

1) если C - не случайная величина, то

$$M(C) = C, \quad M(CX) = CM(X); \quad (3.41)$$

2) для любых случайных величин X и Y

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y); \quad (3.42)$$

3) математическое ожидание линейной функции равно

$$M\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i M(X_i) + b, \quad (3.43)$$

где a_i, b - не случайные коэффициенты;

4) для любых X и Y

$$M(XY) = M(X)M(Y) + K_{xy}. \quad (3.44)$$

Если X и Y некоррелированы ($K_{xy} = 0$), то

$$M(XY) = M(X)M(Y); \quad (3.45)$$

5) если C - не случайная величина, то

$$D(C) = 0;$$

6) не случайную величину C можно выносить за знак дисперсии, возводя ее в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X), \quad \sigma(CX) = |C| \sigma(X); \quad (3.46)$$

7) для любых случайных величин X и Y

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2K_{xy}. \quad (3.47)$$

Дисперсия суммы (разности) некоррелированных случайных величин ($K_{xy} = 0$) равна сумме их дисперсий:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y); \quad (3.48)$$

и

8) дисперсия линейной функции $\sum_{i=1}^n a_i X_i + b$ определяется

формулой

$$D\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 D(X_i) + 2 \sum_{i < j} a_i a_j K_{ij}. \quad (3.49)$$

Если все величины X_1, X_2, \dots, X_n не коррелированы, то

$$D\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 D(X_i); \quad (3.50)$$

9) для независимых случайных величин X и Y дисперсия их произведения равна

$$D(XY) = D(X)D(Y) + m_x^2 D(Y) + m_y^2 D(X). \quad (3.51)$$

§ 2. Примеры

Пример 3.1. Проводится стрельба по подвижной цели до первого попадания. Вероятность p попадания при каждом выстреле равна 0,4. На стрельбу отпущено 4 снаряда.

Определить: а) математическое ожидание m_x случайной величины X - числа израсходованных снарядов; б) дисперсию σ_x^2 и среднее квадратичное значение σ_x величины X .

Решение. Случайная величина X может принять следующие значения: $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$. Вероятности принятия величиной X этих значений соответственно равны: $P(X=1)=p_1=p=0,4$; $P(X=2)=p_2=(1-p)p=0,6 \cdot 0,4=0,24$; $P(X=3)=p_3=(1-p)^2 p=0,6^2 \cdot 0,4=0,144$; $P(X=4)=p_4=(1-p)^3 p=(1-p)^3 p+(1-p)^4=0,6^3 \cdot 0,4+0,6^4=0,216$.

а) По определению математического ожидания имеем

$$m_x = \sum_{i=1}^n x_i p_i = \sum_{i=1}^4 x_i p_i = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,24 + 3 \cdot 0,144 + 4 \cdot 0,216 \approx 2,2 \text{ см.}$$

б) Для дисперсии получим

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^4 (x_i - m_x)^2 p_i = (1 - 2,2)^2 \cdot 0,4 + (2 - 2,2)^2 \cdot 0,24 + (3 - 2,2)^2 \cdot 0,144 + (4 - 2,2)^2 \cdot 0,216 \approx 1,38 \text{ см}^2,$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{1,38} \approx 1,17 \text{ см.}$$

Пример 3.2. Случайная величина X распределена по закону Лапласа с плотностью вероятности

$$W_1(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}, \quad \lambda > 0.$$

Определить математическое ожидание и дисперсию величины X .

Решение. Математическое ожидание m_x определяется формулой (3.2)

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x W_1(x) dx = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\lambda |x|} dx.$$

Так как плотность вероятности $W_1(x)$ имеет разные аналитические выражения при $x < 0$ и $x > 0$, то

$$m_x = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^0 x e^{\lambda x} dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

Сделаем в первом интеграле замену переменной $x = -y$, получим

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{\lambda}{2} \int_{\infty}^0 y e^{-\lambda y} dy + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \\ &= -\frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} y e^{-\lambda y} dy + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx. \end{aligned}$$

Известно, что

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}. \quad (3.52)$$

Следовательно,

$$m_x = -\frac{\lambda}{2} \frac{\Gamma(2)}{\lambda^2} + \frac{\lambda}{2} \frac{\Gamma(2)}{\lambda^2} = 0.$$

Поскольку $m_x = 0$, то

$$\sigma_x^2 = m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W_1(x) dx = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^0 x^2 e^{\lambda x} dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} y^2 e^{-\lambda y} dy + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx.$$

Но

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(3)}{\lambda^3}.$$

Поэтому

$$\sigma_x^2 = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Пример 3.3. Случайная ошибка измерения дальности импульсным радиодальномером имеет нормальное распределение, причем среднее квадратичное отклонение равно 50 м.

Найти вероятность P того, что измеренное значение дальности будет отличаться по абсолютной величине от истинного не более чем на 30 м, если систематическая ошибка дальномера равна +20 м.

Решение. По условию случайная ошибка распределена по нормальному закону. Следовательно, плотность вероятности $w(x)$ суммарных ошибок имеет вид

$$w(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{50 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-20)^2}{2 \cdot 50^2}}.$$

Измеренное значение дальности по абсолютной величине не превышает истинное более чем на 30 м, если выполняется неравенство

$|X| < 30$ м. Вероятность P выполнения этого неравенства равна

$$\begin{aligned} P &= P(|X| < 30) = P(-30 \leq X < 30) = \int_{-30}^{30} w(x) dx = \Phi\left(\frac{30-20}{50}\right) - \\ &- \Phi\left(\frac{-30-20}{50}\right) = \Phi(0,2) - [1 - \Phi(1)] = 0,5793 - 1 + 0,8413 \approx 0,421, \end{aligned}$$

где $\Phi(z)$ – интеграл вероятности (2.9).

Пример 3.4. Случайная величина X описывается биномиальным законом распределения вероятностей.

Найти математическое ожидание m_y и дисперсию σ_y случайной величины $Y = e^{aX}$.

Решение. Случайная величина X может принимать значения $0, 1, 2, \dots, n$. Вероятность $P_n(k)$ того, что она примет значение k определяется формулой

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p.$$

Используя формулы (3.5) и (3.7), получим

$$\begin{aligned} m_y &= \sum_k \varphi(x_k) p_k = \sum_{k=0}^n y_k P_n(k) = \sum_{k=0}^n e^{ak} C_n^k p^k q^{n-k} = (q + pe^a)^n; \\ \sigma_y^2 &= \sum_{k=0}^n y_k^2 P_n(k) - m_y^2 = \sum_{k=0}^n C_n^k (pe^{2a})^k q^{n-k} - m_y^2 = \\ &= (q + pe^{2a})^n - (q + pe^a)^{2n}. \end{aligned}$$

Пример 3.5. Случайная величина X подчинена равномерному закону распределения вероятностей в интервале от 0 до 2.

Определить математическое ожидание и дисперсию величины $Y = 6X^2$.

Решение. На основании формулы (3.6) имеем

$$m_y = \int_0^2 \varphi(x) W_1(x) dx = \int_0^2 6x^2 \cdot \frac{1}{2} dx = 3 \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = 8.$$

Дисперсию случайной величины Y находим по формуле (3.8)

$$\sigma_y^2 = \int_0^2 [\varphi(x) - m_y]^2 W_1(x) dx = \int_0^2 (6x^2)^2 \frac{1}{2} dx - 18 \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 - 64 = 51,2.$$

Пример 3.6. По каналу связи с помехами передается кодовая комбинация, состоящая из двух импульсов. В результате независимого воздействия каждый из импульсов может быть подавлен помехой с вероятностью p .

Определить характеристическую функцию $\theta_1(u)$ случайной величины X – числа подавленных помехами импульсов.

Решение. Возможные значения дискретной случайной величины X : $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Вероятности p_i этих значений соответственно равны $p_1 = (1-p_0)^2$; $p_2 = 2p(1-p)$; $p_3 = p^2$.

Согласно формуле (3.28) имеем

$$\begin{aligned} \theta_1(u) &= \sum_{k=1}^3 p_k e^{iux_k} = (1-p)^2 + 2p(1-p)e^{iu} + p^2 e^{2iu} = \\ &= 1 - 2p + p^2 + 2p e^{iu} - 2p^2 e^{iu} + p^2 e^{2iu} = \\ &= 1 + 2p(e^{iu} - 1) + p^2(e^{iu} - 1)^2 = [1 + p(e^{iu} - 1)]^2. \end{aligned}$$

Пример 3.7. Случайная величина X имеет равномерную плотность вероятности в пределах от $-\beta/2$ до $\beta/2$.

Определить характеристическую функцию $\theta_1(u)$ случайной величины X и нарисовать ее график.

$$\text{Решение. По условию нормировки } \int_{-\beta/2}^{\beta/2} W(x) dx = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} C dx = C \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = 1$$

Следовательно $W(x) = C = \frac{1}{\beta}$. Тогда

$$\Theta_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} W_1(x) dx = \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} e^{jux} \frac{1}{\beta} \frac{1}{j\beta u} \left(e^{j\frac{\beta}{2}u} - e^{-j\frac{\beta}{2}u} \right) = \frac{\sin \frac{u\beta}{2}}{\frac{u\beta}{2}}.$$

Графики плотности вероятности $W_1(x)$ и соответствующей ей характеристической функции $\Theta_1(u)$ приведены на рис. 3.1.

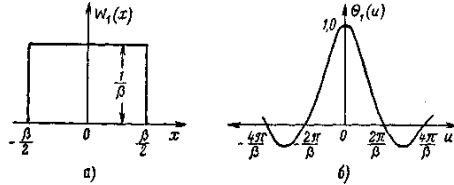


Рис. 3.1. Равномерная плотность вероятности (а) и соответствующая ей характеристическая функция (б).

Пример 3.8. Найти плотность вероятности $W_1(x)$ случайной величины X , характеристическая функция $\Theta_1(u)$ которой имеет вид

$$\Theta_1(u) = \frac{1}{1+u^2}.$$

Решение. Согласно формуле (3.29) имеем

$$\begin{aligned} W_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_1(u) e^{-jux} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jux}}{1+u^2} du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ux - j \sin ux}{1+u^2} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ux}{1+u^2} du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos ux}{1+u^2} du = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \end{aligned}$$

так как

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos dx}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}.$$

Пример 3.9. Случайная величина X распределена по закону «хи-квадрат» с плотностью вероятности

$$W_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{при } x > 0, n > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Вычислить характеристическую функцию $\Theta_1(u)$ и начальные моменты m_k величины X .

Решение. Так как плотность вероятности отлична от нуля только при $x > 0$, то

$$\Theta_1(u) = \int_0^{\infty} e^{jux} W_1(x) dx = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} e^{jux} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{(1-ju)}{2}x} dx.$$

Воспользовавшись интегралом (3.52), получим

$$\Theta_1(u) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1+1)}{(\frac{1}{2}-ju)^{\frac{n}{2}-1+1}} = (1-2ju)^{-\frac{n}{2}}.$$

Начальные моменты m_k связаны с характеристической функцией соотношением (3.30):

$$m_k = \frac{1}{j^k} \frac{d^k \Theta_1(u)}{du^k} \Big|_{u=0}.$$

В нашем случае:

$$\frac{d\Theta_1(u)}{du} = jn(1-2ju)^{-\frac{n}{2}-1},$$

$$\frac{d^2\Theta_1(u)}{du^2} = j^2 n(n+2)(1-2ju)^{-\frac{n}{2}-2},$$

$$\frac{d^3\Theta_1(u)}{du^3} = j^3 n(n+2)(n+4)(1-2ju)^{-\frac{n}{2}-3},$$

$$\frac{d^4\Theta_1(u)}{du^4} = j^4 n(n+2)(n+4)(n+6)(1-2ju)^{-\frac{n}{2}-4}, \dots,$$

$$\frac{d^k\Theta_1(u)}{du^k} = j^k n(n+2)(n+4) \dots (n+2k-2)(1-2ju)^{-\frac{n}{2}-k}.$$

Таким образом,

$$m_k = n(n+2)(n+4) \dots (n+2k-2).$$

Пример 3.10. Случайная точка на плоскости распределена по закону, приведенному в таблице.

y_j	x_i	
	0	1
-1	0,10	0,15
0	0,15	0,25
1	0,20	0,15

Найти: а) математические ожидания случайных величин X и Y ; б) дисперсии величин X и Y ; в) корреляционный момент K_{xy} и коэффициент корреляции R_{xy} .

Решение. Воспользовавшись соответствующими определениями, получим:

$$\text{а) } m_x = \sum_i \sum_j x_i p_{ij} = \sum_{i=1}^3 x_i p(x_i) = 0 \cdot 0,45 + 1 \cdot 0,55 = 0,55,$$

$$m_y = \sum_i \sum_j y_j p_{ij} = \sum_{j=1}^3 y_j p(y_j) = -1 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,40 + 1 \cdot 0,35 = 0,10;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \sigma_x^2 &= \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^2 p_{ij} = \sum_{i=1}^2 (x_i - m_x)^2 p(x_i) = \\ &= (0 - 0,55)^2 \cdot 0,45 + (1 - 0,55)^2 \cdot 0,55 = 0,2475, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \sum_i \sum_j (y_j - m_y)^2 p_{ij} = \sum_{j=1}^3 (y_j - m_y)^2 p(y_j) = \\ &= (-1 - 0,10)^2 \cdot 0,25 + (0 - 0,10)^2 \cdot 0,40 + (1 - 0,10)^2 \cdot 0,35 = 0,59; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } K_{xy} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij} = (x_1 - m_x) \{ (y_1 - m_y) p_{11} + (y_2 - m_y) p_{12} + (y_3 - m_y) p_{13} \} + \\ &+ (x_2 - m_x) \{ (y_1 - m_y) p_{21} + (y_2 - m_y) p_{22} + (y_3 - m_y) p_{23} \} = (0 - 0,55) [(-1 - 0,10) \cdot 0,10 + \\ &+ (0 - 0,10) \cdot 0,15 + (1 - 0,10) \cdot 0,20] + (1 - 0,55) [(-1 - 0,10) \cdot 0,15 + (0 - 0,10) \cdot 0,25 + (1 - 0,10) \cdot 0,15] = -0,055, \end{aligned}$$

$$R_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = -\frac{0,055}{\sqrt{0,2475} \sqrt{0,59}} \approx -0,144.$$

§ 3. Задачи и ответы

3.1. Какие размерности имеют математическое ожидание m , дисперсия σ^2 и среднее квадратичное отклонение σ ?

3.2. Закон распределения дискретной случайной величины задан рядом распределения

x_i	-2	0	2	4	6
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Найти математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 случайной величины X .

Ответ: $m_x = 2$; $\sigma_x^2 = 4,8$.

3.3. Определить математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 числа приборов X , давших отказ за время испытаний на надежность, если испытанию подвергается один прибор, а вероятность его отказа равна q .

Ответ: $m_x = q$; $\sigma_x^2 = q(1-q)$.

3.4. Стрельба ведется по наблюдаемой цели. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,5 и от выстрела к выстрелу не меняется.

Вычислить математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 случайной величины X – числа попаданий в цель при пяти выстрелах.

Ответ: $m_x = 2,5$; $\sigma_x^2 = 1,25$.

3.5. На вход ограничителя воздействует видеопульс со случайной амплитудой. Вероятность превышения импульсом уровня ограничения равна p .

Рассматривая событие превышения уровня ограничения импульсом как случайную величину X , принимающую значения 1 (превышение) и 0 (не превышение), определить среднее значение и дисперсию величины X . Найти среднее значение и дисперсию числа Y импульсов, превысивших порог, при подаче на вход ограничителя n импульсов.

Ответ: $m_x = p$, $\sigma_x^2 = p(1-p)$; $m_y = np$, $\sigma_y^2 = np(1-p)$.

3.6. Вероятность приема позывного сигнала одной радиостанции другой радиостанцией равна 0,2 при каждой посылке. Позывные передаются каждые 5 сек до тех пор, пока не будет получен ответный сигнал. Общее время прохождения позывного и ответного сигналов равно 16 сек.

Найти среднее число переданных позывных сигналов до установления двухсторонней связи.

Ответ: $m = 8$.

3.7. В партии из 100 изделий имеется 20 бракованных. Из партии выбираются для контроля 5 изделий.

Определить математическое ожидание и дисперсию числа бракованных изделий, содержащихся в случайной выборке.

Ответ: $m = 1$; $\sigma^2 = 76/99$.

3.8. Вероятность отыскания малоразмерного объекта в заданном районе в каждом вылете равна p .

Определить математическое ожидание и дисперсию числа произведенных независимых вылетов, которые выполняются до первого обнаружения цели.

Ответ: $m_x = 1/p$; $\sigma_x^2 = (1-p)/p^2$.

3.9. Производится стрельба по цели до получения k попаданий. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p . Случайная величина X – число необходимых выстрелов.

Найти математическое ожидание и дисперсию величины X .

Ответ: $m_x = k/p$; $\sigma_x^2 = k(1-p)/p^2$.

3.10. В партии из n изделий имеется одно бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и каждое вынуженное изделие проверяют.

Найти математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 числа проверенных изделий.

Ответ: $m_x = k/p$; $\sigma_x^2 = k(1-p)/p^2$.

3.11. Связь с дрейфующей станцией могут поддерживать n радиостанций. Вступает в двухстороннюю связь та из них, которая первой примет позывной дрейфующей станции, причем это событие

равновероятно для всех n радиостанций ($p = 1/n$). Дрейфующая станция будет устанавливать связь m раз.

Определить: а) вероятность P того, что радиостанция № 1 вступит в двухстороннюю связь k раз; б) математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 числа вступлений в двухстороннюю связь этой радиостанции.

Ответ :

$$a) P = C_m^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-k};$$

$$б) m_x = \frac{m}{n}; \sigma_x^2 = \frac{m(n-1)}{n^2}.$$

3.12. Найти математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 случайной величины X , распределенной по закону Пуассона:

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k=0, 1, 2, \dots; \lambda > 0.$$

Ответ: $m_x = \lambda$; $\sigma_x^2 = \lambda$.

3.13. Число вызовов на телефонной станции за единицу времени распределено по закону Пуассона. Математическое ожидание числа вызовов за час равно 30.

Найти вероятность того, что за минуту поступит не менее двух вызовов.

Ответ: 0,09.

3.14. На радиомаяк-ответчик в среднем поступает 15 запросов за 1 час.

Считая число запросов случайной величиной, распределенной по закону Пуассона, определить вероятность того, что за 4 мин: а) поступит ровно 3 запроса; б) поступит хотя бы один запрос.

Ответ: а) 0,0613; б) 0,632.

3.15. Радиостанция передает информацию в течение времени $\tau = 10$ мсек. Работа ее происходит при наличии хаотической импульсной помехи, среднее число импульсов которой в одну секунду составляет 10^4 . Для срыва передачи достаточно попадания одного импульса помехи в период работы станции.

Считая, что число импульсов помехи, попадающих в данный интервал времени, распределено по закону Пуассона, найти вероятность P срыва передачи информации.

Ответ [13]: $P = P(k > 0; \tau) = 0,09516$.

3.16. Случайная величина X принимает только целые неотрицательные значения с вероятностями

$$P(k) = P(X=k) = P_0 \left(\frac{\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^k \frac{1 \cdot (1+\alpha)(1+2\alpha) \dots [1+(k-1)\alpha]}{k!},$$

где

$$P_0 = P(0) = (1+\alpha\lambda)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0, \lambda > 0.$$

Определить математическое ожидание и дисперсию величины X . Ответ: $m_x = \lambda$; $\sigma_x^2 = \lambda(1+\alpha\lambda)$.

3.17. Изменение частоты X генератора из-за самопрогрева подчинено распределению, график которого изображен на рис. 3.2.

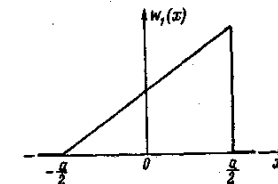


Рис. 3.2. Плотность вероятности.

Определить: а) выражения для плотности вероятности $W_f(x)$ и функции распределения $F_f(x)$; б) математическое ожидание m_x и среднее квадратичное значение случайной величины X .

Ответ:

a)

$$W_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\frac{a}{2}, \\ \frac{2x+a}{a^2} & \text{при } -\frac{a}{2} < x \leq \frac{a}{2}, \\ 0 & \text{при } x > \frac{a}{2}; \end{cases}$$

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\frac{a}{2}, \\ \frac{4x^2+4ax+a^2}{4a^2} & \text{при } -\frac{a}{2} < x \leq \frac{a}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{a}{2}. \end{cases}$$

б) $m_x = \frac{a}{6}$, $\sigma_x^2 = \frac{a^2}{3\sqrt{2}}$.

3.18. Сообщение передается квантованными импульсами с шагом квантования $\Delta = 1\text{В}$.

Предполагая, что ошибка квантования равномерно распределена в пределах интервала квантования и имеет нулевое среднее значение, определить дисперсию σ^2 (мощность) шума квантования.

Ответ: $\sigma^2 = 1/12 \text{ В}^2$

3.19. Случайная величина X с математическим ожиданием $m_x = 4$ и дисперсией $\sigma_x^2 = 3$ распределена равномерно.

Найти плотность вероятности $W_1(x)$ величины X .

Ответ:

$$W_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{при } 1 < x \leq 7, \\ 0 & \text{при } x \leq 1 \text{ и } x > 7. \end{cases}$$

3.20. При измерении напряжения гармонического колебания $u(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$ ламповым вольтметром, проградуированным в эффективных значениях, стрелка вольтметра из-за наличия помех равномерно колеблется между значениями α_1 и α_2 .

Вычислить: а) среднее значение m_α показаний вольтметра; б) относительную погрешность $\Delta = \sigma/m_\alpha$ измерения амплитуды напряжения $u(t)$, где σ_α – среднее квадратичное значение.

Ответ:

$$\text{а) } m_\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}; \quad \text{б) } \Delta = \frac{[\alpha_2 - \alpha_1]}{\sqrt{3}(\alpha_2 + \alpha_1)}.$$

3.21. Время безотказной работы самолетного радиоэлектронного оборудования в полете является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону.

Определить вероятность безотказной работы оборудования в течение десятичасового полета, если среднее время безотказной работы по статистическим данным составляет 200 час.

Ответ: 0,951.

3.22. Вероятность того, что станок, работающий в момент t_0 , не остановится до момента $t_\alpha + t$, определяется формулой

$$P(t) = e^{-\alpha t}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию рабочего периода станка (время между двумя последовательными остановками).

Ответ:

$$m_t = \frac{1}{\alpha}; \quad \sigma_t^2 = \frac{1}{\alpha^2}.$$

3.23. Линия связи длиной l обслуживается ремонтной бригадой, база которой находится у середины линии.

Найти среднее значение и дисперсию расстояния (вдоль линии) от базы до места очередного ремонта, если известно, что последнее с одинаковой вероятностью находится в любой точке линии.

Ответ:

$$m = \frac{l}{4}; \quad \sigma^2 = \frac{l^2}{48}.$$

3.24. Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса R . Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади области.

Определить математическое ожидание и дисперсию расстояния X точки до центра круга.

Ответ:

$$m_x = \frac{2}{3} R; \quad \sigma_x^2 = \frac{R^2}{18}.$$

3.25. Радиотехническая система состоит из пяти последовательно соединенных устройств, среднее время безотказной работы каждого из которых составляет: $T_1 = 40$, $T_2 = 60$, $T_3 = 100$, $T_4 = 80$, $T_5 = 150$ час. Распределение времени безотказной работы устройств экспоненциальное.

Вычислить: а) среднее время T_0 безотказной работы системы; б) вероятность P безотказной работы системы за время $t = 3$ час.

Ответ: а) $T_0 = 14,1$ час; б) $P = 0,811$.

3.26. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$W_1(x) = \begin{cases} \frac{x^m}{m!} e^{-x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Определить математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 величины X .

Ответ: $m_x = \sigma_x^2 = m + 1$.

3.27. Плотность вероятности случайной величины X задана выражением

$$W_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию величины X .

Ответ:

$$m_x = 0; \quad \sigma_x^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

3.28. Мгновенные значения амплитуды X принимаемого сигнала при замираниях описываются распределением Релея

$$W_1(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0.$$

Определить среднее значение и дисперсию случайной величины X .

Ответ:

$$m_x = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad \sigma_x^2 = \sigma^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right).$$

3.29. Случайная величина R (расстояние от точки попадания до центра мишени) распределена по закону вида

$$W_1(r) = \begin{cases} Ar e^{-hr^2} & \text{при } r > 0, \\ 0 & \text{при } r \leq 0. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A ; б) моду M , медиану Me , математическое ожидание m_r и дисперсию σ_r^2 величины R ; в) вероятность P того, что в результате выстрела расстояние от точки попадания до центра мишени окажется меньше его моды.

Ответ:

$$\text{а) } A = 2h^2;$$

$$\text{б) } M = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \quad Me = \frac{\sqrt{\ln 2}}{h}, \quad m_r = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}, \quad \sigma_r^2 = \frac{4-\pi}{4h^2};$$

$$\text{в) } P = 0,393.$$

3.30. Интенсивность отказов элемента $\lambda(t)$ определяется функцией вида

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{100-t} & \text{при } 0 < t < 100 \text{ час}, \\ 0 & \text{при других значениях } t. \end{cases}$$

Определить: а) вероятность P безотказной работы элемента в интервале времени $0 - 10$ час; б) среднее время T_0 безотказной работы элемента; в) плотность вероятности $W_1(t)$ распределения времени безотказной работы элемента.

Ответ: а) $P = 0,9$; б) $T_0 = 50$ час; в) $W_1(t) = \frac{1}{100}$ при $0 < t \leq 100$ час.

3.31. Ряд распределения случайной величины X имеет вид

x_i	0	1	2
p_i	0,2	0,5	0,3

Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 1 - 2X^e$.

Ответ: $m_y = -2,4$; $\sigma_y^2 = 9,63$.

3.32. Доказать, что математическое ожидание центрированной и нормированной случайной величины

$$\frac{X - m_x}{\sigma_x}$$

равно нулю, а дисперсия – единице.

3.33. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X равны соответственно m_x и σ_x^2 .

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = -X$.

Ответ: $m_y = -m_x$; $\sigma_y^2 = \sigma_x^2$.

3.34. Через равные временные интервалы произведено 36 измерений величины тока, при которых получены следующие результаты:

Значение тока, ма	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Число измерений	3	1	5	4	10	4	5	1	3

Определить среднее значение тока m_i , среднее значение мощности $M(I^2)$ на единичном сопротивлении и дисперсию σ_i^2 .

Ответ: $m_i = 10$ мА; $M(I^2) = 104,5$ мА²; $\sigma_i^2 = 4,5$ мА².

3.35. Плотность вероятности случайной величины X задана выражением

$$W_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 0 & \text{при } x \leq 0, x > 2. \end{cases}$$

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 3X - 1$.

Ответ: $m_y = 3$; $\sigma_y^2 = 2$.

3.36. Случайная величина Φ равномерно распределена в интервале от 0 до 2π .

Вычислить математическое ожидание и дисперсию величины $A_0 \cos^2(\omega_0 t + \Phi)$, где A_0 , ω_0 , t – неслучайные величины.

Ответ:

$$m = \frac{A_0^2}{2}; \sigma^2 = \frac{A_0^2}{8}.$$

3.37. Случайная величина K дискретного типа распределена по закону Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Показать, что первые моменты этого распределения вероятностей выражаются следующими формулами:

$$m_1 = m_2 = m_3 = \lambda; m_4 = \lambda(1 + 3\lambda).$$

3.38. Доказать справедливость следующего соотношения между центральными μ_k и начальными m_k моментами:

$$\mu_n = \sum_{k=2}^n (-1)^{n-k} C_n^k m_k m_1^{n-k} + (-1)^{n-1} (n-1) (m_1)^n.$$

3.39. Случайная величина X имеет плотность вероятности вида

$$W_1(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$$

(экспоненциальный односторонний закон).

Определить: а) функцию распределения $F_1(x)$; б) математическое ожидание m , дисперсию σ^2 , коэффициенты асимметрии γ_1 и эксцесса γ_2 .

Ответ:

$$а) F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

$$б) m = \frac{1}{\lambda}, \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}; \gamma_1 = 2, \gamma_2 = 6.$$

3.40. Показать, что для распределения Лапласа

$$W_1(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \lambda > 0,$$

справедливы следующие формулы для моментов случайной величины X :

$$m_{2k+1} = 0, m_{2k} = \mu_{2k} = \frac{(2k)!}{\lambda^{2k}}.$$

3.41. Найти центральные μ_k и центральные абсолютные ν_k моменты случайной величины X , распределенной по нормальному закону

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Ответ: При k – нечетном $\mu_k = 0$,

$$\nu_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^k 2^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^k 2^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \sigma^k.$$

При k – четном

$$\mu_k = \nu_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^k 2^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right).$$

3.42. Показать, что для одностороннего нормального распределения

$$W_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, x > 0,$$

среднее значение и дисперсия соответственно равны

$$m_x = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \sigma_x^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \sigma^2,$$

а начальный момент k -го порядка определяется формулой

$$m_k = \sigma^k 2^{\frac{k}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}.$$

3.43. Найти для бета-распределения, задаваемого плотностью вероятности

$$W_1(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, 0 < x < 1, a > 0, b > 0,$$

начальный момент k -го порядка.

Ответ:

$$m_k = \frac{\Gamma(a+b) \Gamma(a+k)}{\Gamma(a) \Gamma(a+b+k)}.$$

3.44. Определить характеристическую функцию $\theta_1(u)$ случайной величины X , принимающей: а) одно единственное значение, равное c ; б) с одинаковой вероятностью два значения, равные $\pm c$.

Ответ: а) $\theta_1(u) = e^{juc}$; б) $\theta_1(u) = \cos(uc)$.

3.45. Вероятность появления события A при одном испытании равна p .

Найти характеристическую функцию $\theta_1(u)$ числа появлений события A при одном испытании.

Ответ: $\theta_1(u) = 1 + p(e^{ju} - 1)$.

3.46. Доказать, что для биномиального закона распределения вероятностей

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

характеристическая функция $\theta_1(u)$ имеет вид

$$\Theta_1(u) = [1 + p(e^{ju} - 1)]^n.$$

3.47. Характеристическая функция случайной величины K равна

$$\Theta_1(u) = \frac{e^{iu} (1 - e^{iun})}{n(1 - e^{iu})}.$$

Показать, что K является дискретной случайной величиной с равномерным законом распределения вероятностей:

$$P(k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

3.48. Найти характеристическую функцию $\theta_1(u)$ случайной величины, подчиненной закону Пуассона с параметром λ :

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Ответ:

$$\Theta_1(u) = e^{\lambda(e^{iu} - 1)}.$$

3.49. Плотность вероятности $W_1(x)$ случайной величины X представляет собой четную функцию.

Доказать, что характеристическая функция $\theta_1(u)$ величины X вещественна.

3.50. Показать, что если $\theta_1(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$ – характеристическая функция случайной величины X , то плотность вероятности $w(x)$ этой величины равна

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

3.51. Найти плотности вероятности случайных величин, имеющих следующие характеристические функции:

$$a) \quad \theta_1(u) = \begin{cases} 1 - |u| & \text{при } |u| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |u| > 1; \end{cases}$$

$$b) \quad \theta_1(u) = e^{i\pi u - h|u|}.$$

Ответ:

$$a) \quad W_1(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2;$$

$$b) \quad W_1(x) = \frac{h}{\pi [h^2 + (x - x_0)^2]}.$$

3.52. Показать, что характеристическая функция

$$\theta_1(u) = \cos \frac{\pi u}{2(1 - u^2)}$$

соответствует плотности вероятности

$$W_1(x) = \frac{1}{2} \cos x, \quad -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}.$$

3.53. Определить характеристическую функцию $\Theta(\omega)$ случайной величины X , плотность вероятности которой равна

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Ответ:

$$\Theta_1(u) = e^{i\mu m - \frac{\sigma^2 u^2}{2}}.$$

3.54. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$W_1(x) = \frac{a}{2 \operatorname{ch}^2 ax}.$$

Вычислить характеристическую функцию величины X .

Ответ:

$$\Theta_1(u) = \frac{u\pi}{2a \operatorname{sh} \frac{u\pi}{2a}}.$$

3.55. Определить характеристическую функцию $\theta_1(u)$ случайной величины $Y = aX + b$, где a и b – постоянные.

Ответ:

$$\Theta_{1Y}(u) = \Theta_{1X}(au) e^{ibu}.$$

3.56. Доказать, что, характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых.

3.57. Показать, что если случайные величины X и Y связаны между собой линейной зависимостью

$$Y = a + bX,$$

то коэффициент корреляции $R_{xy} = \pm 1$.

3.58. По одной и той же стартовой позиции противника производится три независимых пуска ракет, причем вероятность попадания в цель одной ракетой равна p . Пусть случайная величина X – число попаданий в цель, а случайная величина Y – число промахов.

Определить математические ожидания, дисперсии случайных величин X и Y , а также корреляционный момент и коэффициент корреляции между ними.

Ответ:

$$m_x = 3p; \quad m_y = 3q; \quad \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 3pq; \quad K_{xy} = -3pq; \quad R_{xy} = -1; \quad q = 1 - p.$$

3.59. Изготавливаемые в цехе втулки сортируются по отклонению их внутреннего диаметра от номинального размера на четыре группы со значениями 0,01, 0,02, 0,03 и 0,04 мм и по овальности на четыре группы со значениями 0,002, 0,004, 0,006 и 0,008 мм. Совместное распределение отклонений диаметра (X) и овальности (Y) втулок задано таблицей

$x_i \backslash y_j$	0,01	0,02	0,03	0,04
0,002	0,01	0,02	0,04	0,04
0,004	0,03	0,24	0,15	0,06
0,006	0,04	0,10	0,08	0,08
0,008	0,02	0,04	0,03	0,02

Найти: а) одномерные законы распределения каждой из величин X и Y ; б) математические ожидания, средние квадратичные отклонения X и Y и коэффициент корреляции между ними.

Ответ а) величины X и Y имеют следующие распределения:

x_i	0,01	0,02	0,03	0,04
p_i	0,10	0,40	0,30	0,20

y_j	0,002	0,004	0,006	0,008
p_j	0,11	0,48	0,30	0,11

$$b) \quad m_x = 0,026; \quad m_y = 0,00482; \quad \sigma_x \approx 0,0093; \quad \sigma_y \approx 0,00159;$$

$$R_{xy} \approx 0,141.$$

3.60. Ряд распределения случайной величины X имеет вид

x_i	-2	-1	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Вычислить коэффициент корреляции R_{xy} , если $Y = X^2$.

Ответ: $R_{xy} = 0$.

3.61. Случайная величина X имеет математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 ; величина Y связана с X соотношением $Y = 3X - 2$; величина Z , в свою очередь, связана с X соотношением $Z = 3 - 4X$.

Определить: а) корреляционный момент величин Y и Z ; б) коэффициент корреляции Y и Z .

Ответ: а) $K_{yz} = -12\sigma_x^2$; б) $R_{yz} = -1$.

3.62. Система случайных величин (X, Y) имеет следующие характеристики $m_x = 0$, $m_y = 2$,

$\sigma_x^2 = 2$, $\sigma_y^2 = 1$ и коэффициент корреляции $R_{xy} = -1/\sqrt{2}$.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 2X - 3Y$.

Ответ: $m_z = -6$; $\sigma_z^2 = 29$.

3.63. Написать выражение для нормальной плотности вероятности $W_2(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) , если

$$m_x = 0, m_y = 6, \|K_{ij}\| = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 25 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$w_2(x, y) = \frac{1}{32\pi} e^{-\frac{1}{1,28} \left[\frac{x^2}{16} - \frac{1,2x(y-6)}{20} + \frac{(y-6)^2}{25} \right]}.$$

3.64. В радиолокационной системе с разнесенным приемом (рис. 3.3) приемники находятся на таких расстояниях друг от друга, что сигналы X , Y и Z статистически независимы. Законы

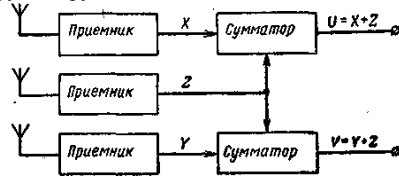


Рис. 3.3. Схема разнесенного приема с тремя приемниками.

распределения вероятностей для сигналов X , Y и Z нормальные с нулевыми средними значениями и дисперсиями $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 3$, $\sigma_z^2 = 12$. Найти коэффициент корреляции для напряжений U и V .

Ответ: $R_{uv} = 0,8$.

3.65. Доказать, что среднее значение квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания m_x меньше, чем среднее значение квадрата ее отклонения от любого другого числа c , т. е.

$$M[(X - m_x)^2] < M[(X - c)^2].$$

3.66. Орудие стреляет по цели, для уничтожения которой достаточно двух попаданий.

Зная, что при одном выстреле орудие попадает в цель с вероятностью p , найти математическое ожидание числа произведенных выстрелов, если известно, что стрельба прекращается сразу после уничтожения цели.

Ответ: $m_x = 2/p$.

3.67. Какому условию должны удовлетворять независимые случайные величины X и Y , чтобы $D(XY) = D(X)D(Y)$.

Ответ: $m_x = m_y = 0$.

3.68. Производится n независимых измерений некоторой физической величины. Результат каждого измерения можно рассматривать как случайную величину X_i с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 .

Определить: а) математическое ожидание m_n и дисперсию σ_n^2 среднего арифметического n измерений; б) относительную ошибку $\Delta = \sigma_n/m_n$ в определении среднего арифметического.

Ответ: а) $m_n = m$, $\sigma_n^2 = \frac{\sigma^2}{n}$;

$$\text{б) } \Delta = \frac{\sigma_n}{m_n} = \frac{\sigma}{m\sqrt{n}}.$$

3.69. Найти математическое ожидание m_{xy} и дисперсию σ_{xy}^2 произведения двух независимых случайных величин X и Y , равномерно распределенных соответственно в промежутках (a, b) и (c, d) .

Ответ:

$$m_{xy} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2},$$

$$\sigma_{xy}^2 = \frac{(a^2 + ab + b^2)(c^2 + cd + d^2)}{9} - \frac{(a+b)^2(c+d)^2}{16}.$$

3.70. Для определения площади квадрата измеряют две его стороны с помощью одного и

того же инструмента и результаты измерения перемножают.

С какой относительной средней квадратичной ошибкой $\Delta = \sigma/m$ нужно измерять стороны квадрата для того, чтобы средняя квадратичная ошибка площади была не более 1 %?

Ответ: $\Delta = 0,71\%$.

3.71. Угол упреждения Y при воздушной стрельбе определяется формулой

$$Y = \frac{U}{v} \sin X,$$

где U – скорость цели; v – скорость полета снаряда; X – курсовой угол цели.

Найти математическое ожидание m_y и среднее квадратичное отклонение σ_y угла упреждения, если X – случайная величина, равномерно распределенная в интервале от 0 до $\pi/2$; U – случайная величина, равномерно распределенная в интервале 600–700 км/час, а $v = 1$ км/сек и постоянна (U и X независимы).

Ответ: $m_y = 0,115$ рад; $\sigma_y = 0,056$ рад.

3.72. Индикатор кругового обзора радиолокационной станции представляет собой круг радиусом a . Вследствие помех может появиться пятно с центром в любой точке этого круга.

Определить математическое ожидание и дисперсию расстояния R центра пятна от центра круга.

Ответ:

$$m_r = \frac{2}{3} a; \quad \sigma_r^2 = \frac{a^2}{18}.$$